生徒の数学的活動を重視するための方策
－数学のよさを認識できる授業を目指して－

○○○○高等学校　○○　○○（数学科）

１　はじめに

日頃，数学の授業において最も頭を悩ませるのが，単元の導入における題材の決定である。例えば，「微分」の導入の際，物体の落下運動における「瞬間の速さ」を取り上げるため，次のような簡単な実験が考えられる。教室において，傾けたカーテンレールの上でビー玉を転がし，ビー玉の位置の変化を測定する。x秒後の移動距離 $f(x)$ がxの２次関数で表せることに気付かせ，平均の速さ及び瞬間の速さの求め方を考察するというものである。続いて，瞬間の速さから「微分係数」の概念を導入する。ここで大切なことは，「微分係数」という抽象的な概念を理解しやすくするために，日常にある落下運動の実験を実際にやってみることである。

このように，単元の導入時に取り上げる具体的な事象が，生徒の学習に対する興味・関心を高める上で，大きな役割を果たす。また，数学のよさを認識するきっかけを与えることにもつながる。

さて，高等学校学習指導要領（平成21年３月９日公示）においては，「生きる力」の理念を共有し，基礎的・基本的な知識・技能の習得を重視した上で，思考力，判断力，表現力等の育成及び学習意欲の向上や学習習慣の確立を図ることをその目標の根本に据えている。そして，平成24年度の入学生から先行実施されることとなった数学科の目標は，その初めに「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，事象を数学的に考察し表現する能力を高め，創造性の基礎を培うとともに，（以下略）」と書かれ，「数学的活動」を一層重視する内容に変わった。今後ますます「数学的活動」を通して，数学のよさや数学を学ぶ意義を認識させ，数学に対する関心と主体的に学ぼうとする意欲を高める授業を行うことが求められている。

このことは，今までも数学の学習指導において大切にされてきたことである。自分自身の実践を振り返ってみると，上述したように，学習の動機付けをするため，また，学習の意義を説得力ある形で示すため，単元の導入時に取り上げる具体的な事象について工夫を凝らしてきた。しかし，大学進学希望の生徒が多いため，授業進度を速くしなければならないという制約や，発展的な問題を多く解かせようとする必要性から，授業時間の多くが，生徒に対し一方的に知識を与えたり，問題の解答について解説したりする内容に偏ってしまい，「数学的活動」の広がりが少なかった。

そこで，今までよりも「数学的活動」を重視することを目指した授業を実践したいと考えた。そして，数学のよさを認識させる実践としての有効性を考察し，生徒が目的意識を持って主体的に活動するための方策について研究することをテーマとした。単元の導入，そして単元の学習の発展における授業実践をそれぞれ１つずつ取り上げた。過度の時間を割くことなく，しかも，生徒が学習に対し興味・関心を強く抱く具体的な事象を題材として取り上げることを目指した。本研究を通じ，今までの授業実践について，自らの取組を反省する機会にしたいとも考える。

２　本校の概況

平成20年度２学年，平成21年度３学年は，普通科８クラス（Ａ～Ｈ組），看護科１クラス（Ｎ組）合わせて９クラスからなる。そのうち普通科は，２学年から理系（Ａ～Ｃ組），文系（Ｄ～Ｈ組）に分けて編成（**表１**）した。平成20年度２学年Ａ，Ｈ，Ｎ組では，１クラスごとの一斉授業の形態をとった。その他のクラスでは，１クラス２分割の習熟度別授業を行った。平成20年度の１単位時間は50分，平成21年度の１単位時間は45分である。

平成20年度に担当したクラスの中で２年Ａ，Ｈ組での取組と，平成21年度に担当したクラスの中で３年Ａ組での取組をまとめることにする。

	理　系	文　系	看護科
平成20年度 ２学年	数学Ⅱ　４単位 数学Ｂ　２	数学Ⅱ　４ 〔数学Ｂ　２〕	数学Ａ　３
平成21年度 ３学年	数学Ⅲ　５ 数学Ｃまたは 総合数学　２	〔数学研究Ⅰ　２，前期のみ〕 〔数学研究Ⅱ　２，後期のみ〕 〔数学特講　２，後期のみ〕	数学Ⅱ　３

表１　２，３学年の数学科科目の単位数（〔　〕内は選択科目）

３　積分（数学Ⅱ）の導入

「積分」の学習における目標の１つは，定積分を利用して，直線や曲線で囲まれた図形の面積を求めることができるようにすることである。しかしその際，単なる形式的な計算の力をつけることに終始せず，定積分を用いて面積を求めることの意味や原理を十分に理解させたいと考えた。そこで，図形の面積を求めるための定積分を，「図形を細かく分割し，その分割を限りなく細かくしていったとき，その分割した図形の面積和の極限」によって定義するという，いわゆる「区分求積法」を取り上げることを試みた。その上で，定積分が「被積分関数の原始関数に，積分区間の上端を代入して得た値から下端を代入して得た値を引いた差」としても定義できることを理解させたいと考えた。

そして，「区分求積法」を扱うためのきっかけとして，具体的で考えやすい「円の面積」を求める方法を取り上げた。

（１）単元の授業展開

積分の考え	３時間
不定積分の計算	２時間
定積分の計算	２時間
定積分で表された関数	２時間
定積分と面積	３時間
合計	12時間

以下に，「積分の考え」３時間の授業展開について示す。

「積分の考え」の授業展開

１時間目	円周率πの近似問題　→　円の面積の求め方
２時間目	区分求積法　→　定積分の定義
３時間目	原始関数を用いた面積の求め方

（２）授業でねらう数学的活動

『高等学校学習指導要領解説　数学編』に掲げられた「数学的活動において特に重視する活動」について，次のように項目ごとに記号を付けることにする。

A	自ら課題を見いだし，解決するための構想を立て，考察・処理し，その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり，それを発展させたりすること。
B	学習した内容を生活と関連付け，具体的な事象の考察に活用すること。
C	自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり,議論したりすること。
D	なお，数学的活動は，コンピュータなどを積極的に活用することによって一層充実したものにすることができる。

この授業でねらう数学的活動を，「特に重視する活動」と関連づけて挙げる。

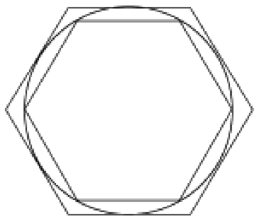
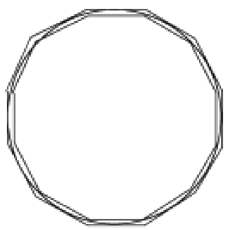
Ⅰ　円に内接する正多角形及び外接する正多角形の面積の計算において三角関数を，また，区分求積法で扱う長方形の面積和の計算において数列の和の考え方を活用する。（→B）

Ⅱ　円の面積を求める方法から，曲線で囲まれた図形の面積の求め方へと発展させる。（→A）

Ⅲ　曲線で囲まれた図形の面積を求める過程で「原始関数」の概念に気付き，その必要性を認識する。（→A）

（３）「積分の考え」１時間目の授業

平成21年２月19日（木）　２年A組，H組

	指　導　内　容	指導上留意すべきこと	評価の観点
導入 ７ 分	○2003年東大の入試問題を提示する。 円周率が，3.05よりも大きいことを証明せよ。	・課題の内容を捉えているか。生徒の反応を注意する。	関心・意欲・態度 ・積極的に取り組もうとしているか。
	○この問題に対する一つの解答について考えることがテーマであることを伝える。		
	○円周率の意味を質問する。 ○半径１の円について，円周の長さや円の面積を求められればよいが，一般に曲線で囲まれた図形については，周の長さや面積を求めることは難しい。特にここでは，半径１の円の面積の近似値を求めるため，円に内接する正多角形の面積を考えていくことを確認する。	・円周率πの定義を考えさせる。 ・πの定義(円周の長さ)÷(直径)によれば，半径１の円周の長さが２πである。それを前提にするならば，円周の長さと，内接する正多角形の辺の長さの和を比較することが，この証明の妥当な方法であろう。しかし，ここでは，円の面積がπ×(半径)^{2}で求められることを認めて証明することを注意する。	知識・理解 ・円周率の定義を知っているか。
展 開 Ⅰ 33 分	○まず，半径１の円に内接する正６角形の面積を計算させる。 	机間指導 ・計算の方針は立っているか，ノートを見ながら確認する。 ・計算の方針が立っていない生徒には，正６角形は合同な６個の正三角形に分割できることに気付かせる。	表現・処理 ・式は立てられているか。 ・効率よく計算しているか。
	○次に，形をより円に近づけ，半径１の円に内接する正12角形の面積を計算させる。 	机間指導 ・正６角形の場合と同様に，正12角形は合同な12個の二等辺三角形に分割できることを強調する。	表現・処理 ・式は立てられているか。 ・効率よく計算しているか。
	○円周率πは，半径１の円に内接する正６角形，正12角形の面積より大きい。しかし，正６角形の面積はおよそ2.598，正12角形の面積は３であり，問題に対する証明はできない。さらに辺の数を多くした多角形の面積を考え，円の面積に近い値を考えなければならないことを確認し，証明のために妥当な正多角形の辺の数を考えさせる。	机間指導 ・正16角形ならば sin22.5°，正24角形であれば sin15°の値を求めることが必要であり，それを求めるには半角の公式を利用すればよいことを確認する。	知識・理解 ・加法定理を利用できるか。
	○円に内接する正16角形や正24角形の面積が，3.05よりも大きな値になることを証明させる。	・例えば正16角形の場合， $3.05<4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ を示すためには，両辺の２乗の比較が利用できることを強調する。	表現・処理 ・数の大小の比較が適切にできているか。
	○一般的に， （円に内接する正n角形の面積）＜（半径１の円の面積）＜（円に外接する	机間指導 ・取組状況の悪い生徒には，正６角形，正12角形，正16角形	

	正n角形の面積）である。円に内接する正n角形の面積と，円に外接する正n角形の面積を求めさせる。	の場合と同様に，合同なn個の二等辺三角形の面積和を考えるとよいことを強調する。	
展開Ⅱ 10分	○n＝1,2,3,…,100 についての $\frac{n}{2}sin\frac{360°}{n}$ と $n \cdot tan\frac{180°}{n}$ の値を印刷したプリント（**図１**）を配付する。 ○nを限りなく大きくしたとき，すなわち正多角形の辺の数を限りなく多くしたとき，正多角形の形は円に近づいていき，その面積は円の面積πに近づいていく様子を実感させる。 ○今後，曲線や直線で囲まれた図形の面積を求める方法として，「多角形を細かく分割し，その分割を限りなく細かくしたとき，分割した図形の面積和の極限を考える」というアイディアを利用することを伝える。	・「数列の極限」には深入りしないようにする。 ・円の面積が，円に内接する正多角形の面積と，円に外接する正多角形の面積に「はさみうち」された値であることに注目させ，その値の変化及び極限をイメージさせる。	数学的な見方や考え方 ・nを限りなく大きくしていくとき，数列の値の変化がイメージできているか。 知識・理解 ・円の面積の求め方として，円に内接または外接する正多角形を分割してできた三角形の面積和を考え，その辺の数を限りなく大きくしていったときの面積和の極限値を求めればよいことが理解できたか。

図１　半径１の円に内接する正n角形の面積と，外接する正n角形の面積

n	$\frac{n}{2}sin\frac{360°}{n}$	$n \cdot tan\frac{180°}{n}$			
1	0.0000000000	0.0000000000	51	3.1336514120	3.1455723295
2	0.0000000000	*	52	3.1339536866	3.1454205151
3	1.2990381057	5.1961524227	53	3.1342390294	3.1452772289
4	2.0000000000	4.0000000000	54	3.1345086814	3.1451418434
5	2.3776412907	3.6327126400	55	3.1347637720	3.1450137881
6	2.5980762114	3.4641016151	56	3.1350053309	3.1448925430
16	3.0614674589	3.1825978781	66	3.1368494290	3.1439674932
17	3.0705541626	3.1778507508	67	3.1369898994	3.1438970695
18	3.0781812899	3.1738856528	68	3.1371242218	3.1438297335
19	3.0846449574	3.1705392381	69	3.1372527497	3.1437653070
20	3.0901699437	3.1676888065	70	3.1373758116	3.1437036249
21	3.0949293313	3.1652407133	71	3.1374937132	3.1436445334
22	3.0990581253	3.1631224679	72	3.1376067389	3.1435878894
23	3.1026628683	3.1612772360	73	3.1377151539	3.1435335596
24	3.1058285412	3.1596599421	74	3.1378192056	3.1434814195
48	3.1326286133	3.1460862151	98	3.1394407791	3.1426692546
49	3.1329904613	3.1459043770	99	3.1394840230	3.1426476062
50	3.1333308391	3.1457333627	100	3.1395259765	3.1426266043

（４）「積分の考え」２時間目の授業

　続いて，いわゆる「区分求積法」をテーマにした。具体的な例として，放物線 $y=x^2$ とx軸，そして直線 $x=1$ によって囲まれた図形の面積を求めることを取り上げた。この図形を細かく分割した図形の面積和を考え，その分割を限りなく細かくしていったときの面積和の極限値を求めていった。前の時間に学習した円の面積を求める方法を発展させるという流れにした。その授業展開は次のとおりである。

①区間[0,1]をn等分して，**図２**のようなn個（一番左には高さが０の長方形があると考える）の長方形の面積和を求めさせた。まず，n＝６の場合について計算

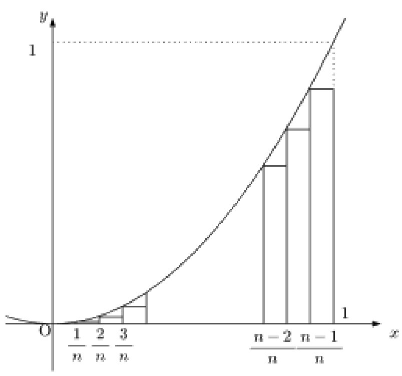


図２　n個の長方形

させ，その後 n＝12，24の場合を求めさせた。そして一般的にn等分したときの長方形の面積和を求めさせた。

②この面積和について，nを限りなく大きくしていくときを想像させた。一定の値に限りなく近づいていくことを直感的に理解させるとともに，式変形からも導き説明した。この面積和の極限が求めたい面積であることに気付かせた。「極限」については深入りせずに，限りなく近づくというイメージを持たせるだけに留めた。

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+(n-1)^2\}$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3}$$

（nを限りなく大きくすると）

③次に，区分求積法の説明をした。a≦x≦b のとき f(x)≧0とする。曲線 y=f(x) とx軸，そして２直線 x=a，x=b で囲まれた図形の面積を S（**図３**）とし，S を求める方法について考えさせた。さらに，この場合の定積分の定義について言及した。

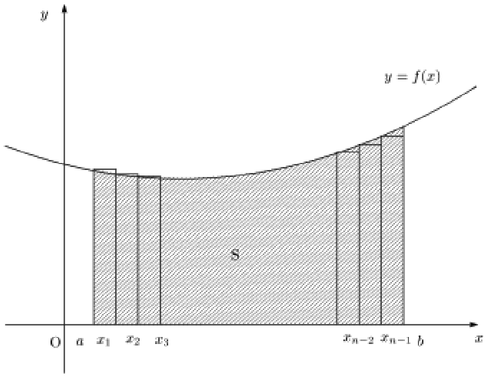


図３　区分求積法

$x_k = a+\frac{b-a}{n}k$ （$k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1$）とするとき，

n個の長方形の面積和は，

$$\frac{1}{n}f(x_0)+\frac{1}{n}f(x_1)+\frac{1}{n}f(x_2)+\cdots\cdots+\frac{1}{n}f(x_{n-1})$$

$$=\frac{1}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\to S$$ （nを限りなく大きくすると）

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\,\Delta x$$

↓ ↓ ↓ （nを限りなく大きくすると）

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

（５）「積分の考え」３時間目の授業

「区分求積法の考え方を利用し面積を求めるには，面倒な計算をしなければならず実用的ではない。そこで，別の方法を考えることにする」という前置きで，「曲線 y=f(x) とx軸，２直線 x=a，x=b で囲まれた図形の面積 S」について別の求め方を説明した。
次の２つの事実を証明した。

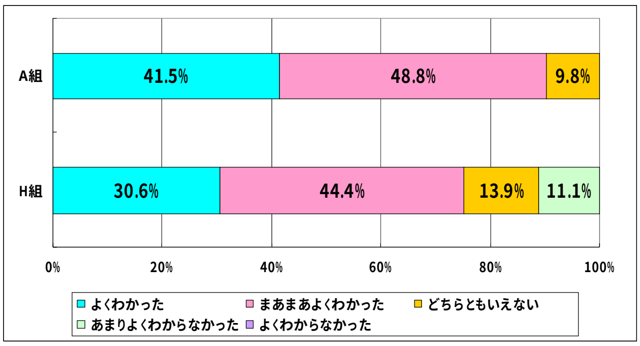
①曲線 y=f(x) とx軸，そして直線 x=a とx座標がxの直線で囲まれた図形の面積を S(x) とすると，S'(x)=f(x) となる。
② F'(x)＝f(x) となる関数 F(x)について，S=F(b)-F(a)である。

ここで初めて「原始関数」を定義し，面積を求める際に原始関数が重要な役割を果たすことを認識させたのである。
以上の３時間の後，不定積分，定積分の計算をテーマにした授業へと進んだ。

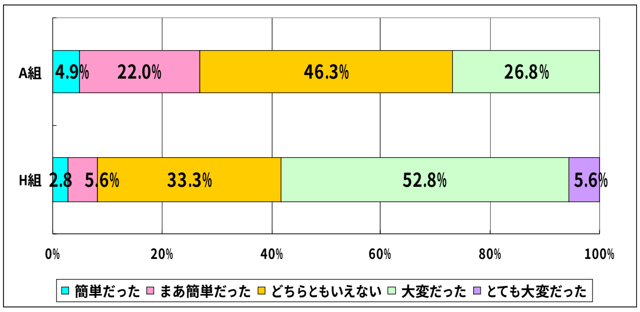
（６）生徒の評価

「積分」の学習の６時間目に行ったアンケート調査の結果である。
（回答数：２年A組41名，H組36名）

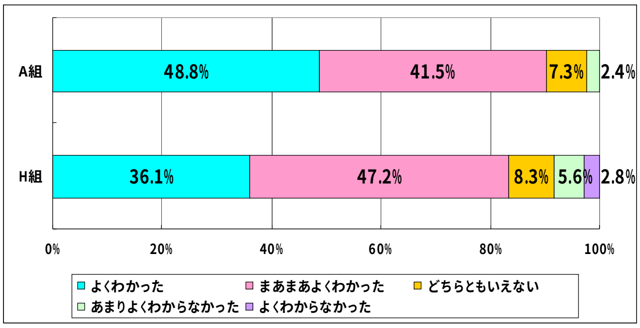
【質問１】
「積分」の導入で，「円周率πの近似問題」を取り上げました。「積分」のイメージ（細かく分割した図形の面積和について，その分割を限りなく細かくしたときの極限）を捉えるために選んだ題材です。どうでしたか？



【質問２】
　円に内接する正多角形の面積と円に外接する正多角形の面積の計算を，６角形，12角形，16角形，そして一般的にｎ角形について行いました。どうでしたか？



【質問３】
　「積分」の授業において，曲線で囲まれた図形の面積を求めることをテーマとして，「円周率πの近似問題」→「区分求積法」→「不定積分」→「定積分」と進めてきました。この流れについてどうでしたか？



【質問４】これまでの「積分」の授業について，他に感想があれば書いてください。

Ａ組
・わかりやすく，すごくよかったです。
・積分について具体的に考えることができ，わかりやすかった。
・東大入試問題「円周率は3.05より大きいことを示せ」という問題は，いつかは自分で取り組もうと思っていたが，授業中にとてもわかりやすい説明があってよかった。
・面積から考えたので定積分が簡単に思えた。また，わかりやすかった。

Ｈ組
・“積分”という考えを説明するのに，私たちが連想しやすいものから授業に入って，イメージがとてもつかみやすくなりました。
・公式がぽんと出されてしまうより，何故そうなるのかという根拠がわかると，とてもわかりやすいので良かったです。
・始める前は難しいと思っていたけれど，成り立ちから考えていって，「どうしてこのようになるのか」といった根本的なことから考えることができたと思う。
・数学が得意な友人から，「イメージがないと積分はわからない」と言われて不安でしたが，授業でのイメージの作り方はとてもわかりやすかったです。
・円の面積を求めるところからの流れがとてもわかりやすく，理解することができました。
・教科書を読むだけでは，積分がどんなものなのかよくイメージできませんでしたが，円などの図形で具体的に考えることで，少しイメージがわきました。

（７）授業における数学的活動の考察

（２）で挙げた数学的活動それぞれについて考察する。

Ⅰ　円に内接する正多角形及び外接する正多角形の面積の計算において三角関数を，また，区分求積法で扱う長方形の面積和の計算において数列の和の考え方を活用する。（→Ｂ）

　円に内接あるいは外接する正ｎ角形の面積をｎの式で表すことは，１年次に「数学Ⅰ」の三角比の学習において取り扱ったことがある。ここでは，正６角形，正12角形，正16角形，正24角形などの面積を三角関数を利用して求め，さらにそれらの値と3.05との大小比較を課題とした。その際，正多角形を合同な三角形に分割して面積を求めること，三角比を用いて面積を表すこと，三角関数の加法定理（「半角の公式」）を利用することが必要となる。時間をかけて机間指導をしながら，多角形を合同な三角形に分割するなどのヒントを与え，できるだけ自分自身で計算していけるようにした。
　辺の数を増やしていけば，正多角形の面積が次第に円周率に近づいていくことは容易にイメージできる。しかし，辺の数を増やして計算する過程において，どこまで増やせば証明したい結果が得られるかがわからないだけに，計算する意欲がわく問題である。正16角形，正24角形などの面積が3.05を超えることを示した生徒は大変満足気であった。三角関数や不等式の証明など，既に学習した内容を具体的な事象の考察に利用する格好の題材であった。
　また，区分求積法においては，区間〔0,1〕を６等分したときの長方形の面積から始め，

12等分，24等分，そしてn等分へというステップを踏んだ。帰納的に考えていくことで，n等分した場合，n個の長方形の面積和を表す式を容易に求めていた。

Ⅱ　円の面積を求める方法から，曲線で囲まれた図形の面積の求め方へと発展させる。（→A）

まず，円の面積を求めるために，内接（外接）する正n角形の面積についてnを限りなく大きくしたときの極限を考えさせた。そして，「正n角形の面積は合同なn個の三角形の面積和である」という考えを発展させて区分求積法を理解させた。円の面積を求めるという具体的な事象を考えることから始め，曲線で囲まれた図形の面積を求める方法を考える過程は一貫性がある。生徒からわかりやすかったという感想が多かった。

Ⅲ　曲線で囲まれた図形の面積を求める過程で「原始関数」の概念に気付き，その必要性を認識する。（→A）

「数学Ⅲ」の内容である「数列の極限」を学ぶ前に，「円の面積」や「区分求積法」を取り上げることに抵抗があることは否めない。しかし，この授業で扱った程度の数列の極限であれば，「数学Ⅲ」における学習を待たなくても，生徒は十分理解できるだろうと判断した。数列の極限を取り扱わなければならないという負担よりも，図形の面積を求める方法としての積分の考えを理解させることを優先した。また，「原始関数（不定積分）」を考える必要性を自然に認識させたかった。
微分の逆演算として積分を導入する方法もある。しかし，面積を求める過程で，面積を表す関数を微分すると曲線を表す関数になることを考えさせ，そこから「原始関数」の概念を認識させることができた。そこで，積分の意義を感じさせることになり，その後の積分の学習のための良い動機付けになった。
授業を実施してみると，取り上げた問題の計算の苦労は別として，内容はわかりやすかったという感想が多かった。

4　微分（数学Ⅲ）の発展的学習

「数学Ⅲ」の「微分法」では，導関数を利用して接線の方程式，関数の増減，最大・最小，凹凸，変曲点を調べることや方程式・不等式を考えることを学習する。また，関数を局所的に１次関数で近似することを学習する。
「数学Ⅱ」において３次方程式や４次方程式を解くことを学ぶが，そこで取り扱うのは，因数定理を利用して１次式や２次式に分解して解く方法である。この方法が使えない場合には，方程式の解を求めることは難しい。社会生活においては，方程式の解を正確に求めることは必ずしも必要ではない。実用上は近似値が求められればよいことが多い。
「数学Ⅲ」の「微分法」を利用した題材として，「ニュートン法」による方程式の近似解の求め方を取り扱うことにした。その原理は理解しやすいが，実際の計算は面倒であるので，コンピュータを活用して計算することにした。解の近似値を計算するだけに留めず，関数のグラフの概形を考えることで，微分の学習をさらに深められるのではないかと考えた。

（1）ニュートン法の原理

関数 $f(x)$ は微分可能であり，$x=\alpha$ は方程式 $f(x)=0$ の実数解の１つであるとする。αの十分近くに x_1をとり，曲線 $y=f(x)$ 上の点（x_1，$f(x_1)$）における接線を引き，そのx切片を x_2 とする。接線の方程式は

$$y = f'(x_1)(x-x_1) + f(x_1)$$

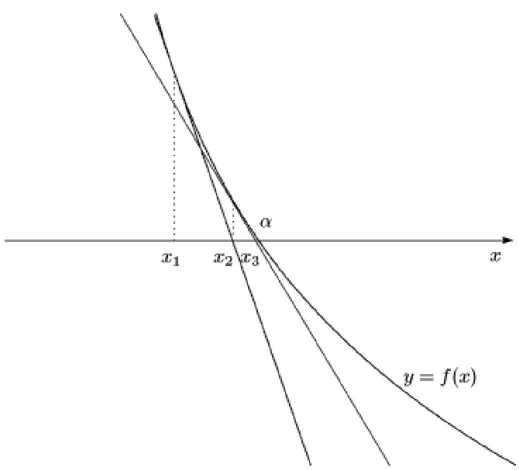
であるから

$$x_2 = x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

である。同様にして，漸化式

$$x_{n+1} = x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

により数列 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ を定めると，初項 x_1 の値を適当に選べば，数列 $\{x_n\}$ はαに収束する。したがって，nを十分大きくとれば x_n がαの近似値となる。



（２）授業でねらう数学的活動

この授業において，生徒に行わせたい数学的活動は次の３点であった。
（A～Dは**３（２）**と同じ）

Ⅰ	コンピュータを活用して方程式の解の近似値を求める。	（→D）
Ⅱ	ニュートン法の漸化式で定まる数列について，初項の値によりその極限値が変化する理由を，曲線とその接線をイメージして考える。	（→A，B）
Ⅲ	考察した結果をレポートにまとめる。	（→C）

（３）授業内容

平成21年９月15日(火)５，６校時（間の休憩時間も入れ２時間連続の100分で行った）情報処理実習室にて実施した。３年A組41名を対象にした。

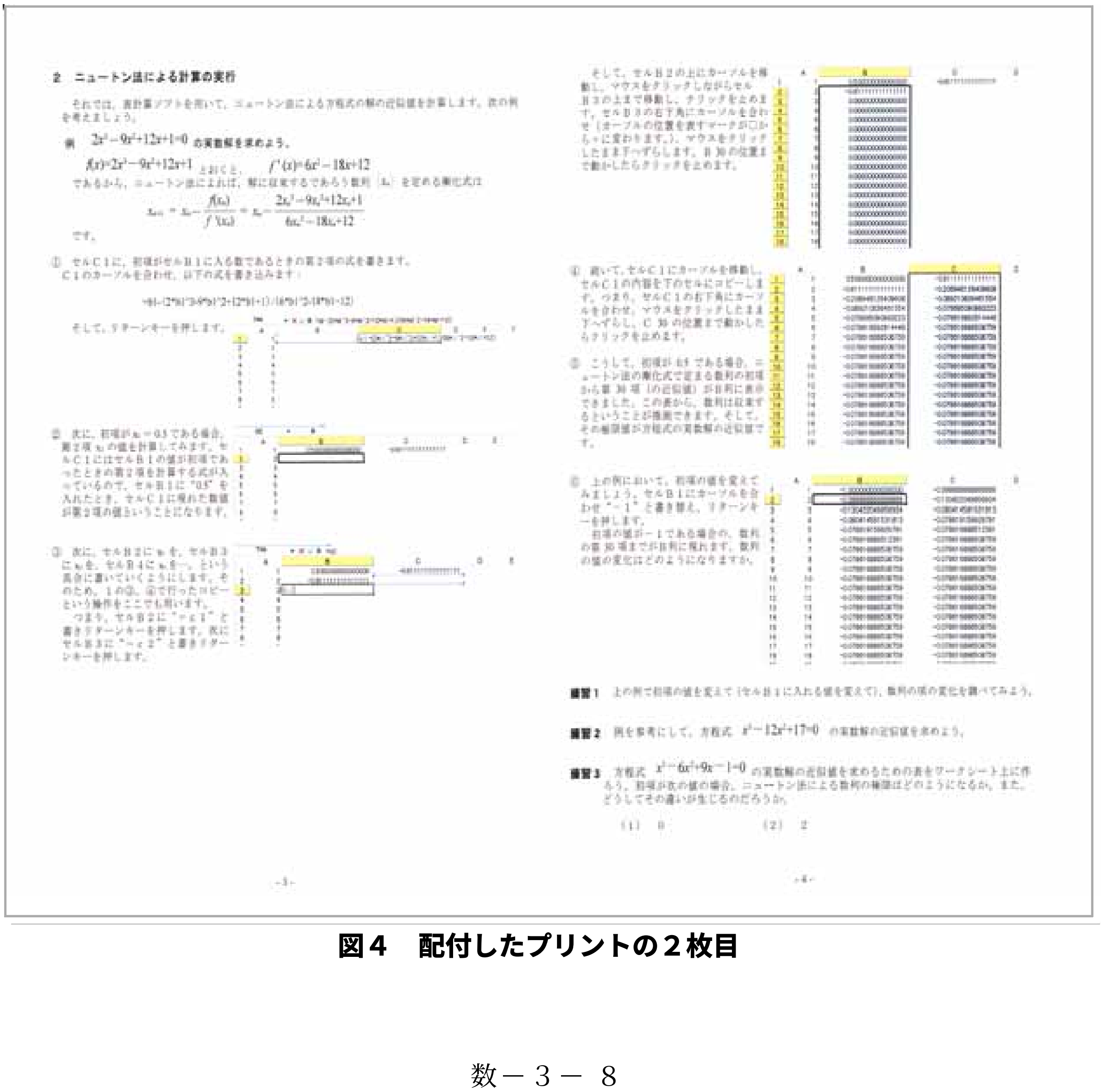
授業展開は次のとおりである。

①ニュートン法について説明する。(20分)

ニュートン法について説明したプリントを配付し，それをもとにして説明した。

②表計算ソフトのワークシートを準備する。(15分)

表計算ソフトの操作を説明したプリントを配付し，それを見ながらパソコンを操作させた。１年次「情報」の授業において表計算ソフトを学習したが，ほとんどの生徒が不慣れであることを想定して，操作手順を丁寧に示したプリント（**図４**）を用意した。



２　ニュートン法による計算の実行

例　$2x^3-9x^2+12x+1=0$ の実数解を求めよう。

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$ とおくと，$f'(x)=6x^2-18x+12$

図４　配付したプリントの２枚目

③例を用いて，ニュートン法を利用した方程式の実数解の近似値を計算する。(15分)

方程式 $2x^3-9x^2+12x+1=0$ …(＊) の実数解の近似値を求める。$f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$ とおくと，ニュートン法の漸化式は

$$x_{n+1} = x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n-\frac{2x_n^3-9x_n^2+12x_n+1}{6x_n^2-18x_n+12}$$

である。

右図（**図５**）のような表を作らせた。セルＢ１に初項を入れると，セルＣ１には第２項が計算され，セルＢ２にはＣ１の数値がコピーされる。以下，同じように各項が下に現れるようにした。結果として，Ｂ列に数列の値が初項から順に並ぶことになる。

C1 =B1-(2*B1^3-9*B1^2+12*B1+1)/(6*B1^2-18*B1+12)

	A	B	C	D	E
1	1	0.500000000000000	-0.611111111111111		
2	2	-0.611111111111111	-0.208948126409608		
3	3	-0.208948126409608	-0.0892106364615540		
4	4	-0.0892106364615540	-0.0786950900993223		
5	5	-0.0786950900993223	-0.0786168928144480		
6	6	-0.0786168928144480	-0.0786168885087590		
7	7	-0.0786168885087590	-0.0786168885087590		
8	8	-0.0786168885087590	-0.0786168885087590		
9	9	-0.0786168885087590	-0.0786168885087590		
10	10	-0.0786168885087590	-0.0786168885087590		
11	11	-0.0786168885087590	-0.0786168885087590		

図５　ワークシート

④練習問題を考えさせ，その結果をまとめさせる。(50分)

作成した表において，セルＢ１の値とＣ列の関数だけを変えて調べられる次の問題について考えさせた。練習２，３については，その結果をレポートとしてまとめさせ，翌日提出させた。

練習１　上の例で初項の値を変えて（セルＢ１に入れる値を変えて）数列の項の変化を調べてみよう。

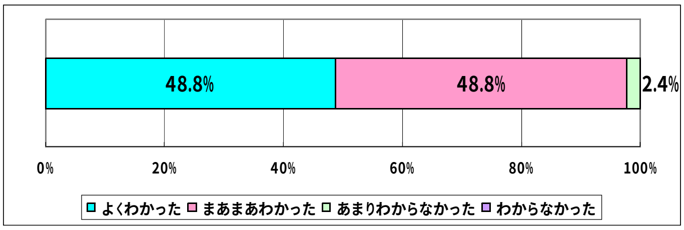
練習２　例を参考にして，方程式 $x^3-12x^2+17=0$ の実数解の近似値を求めよう。

練習３　方程式 $x^3-6x^2+9x-1=0$ の実数解の近似値を求めるための表をワークシート上に作ろう。初項が次の値の場合，ニュートン法による数列の極限はどのようになるか。また，どうしてその違いが生じるのだろうか。
（１）　0　　　　　　　　（２）　2

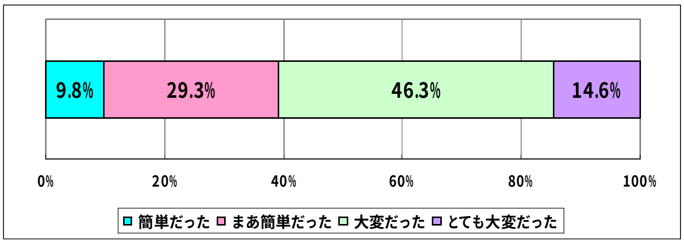
（４）生徒の評価

授業後に行ったアンケート調査の結果である。(回答数：41名)

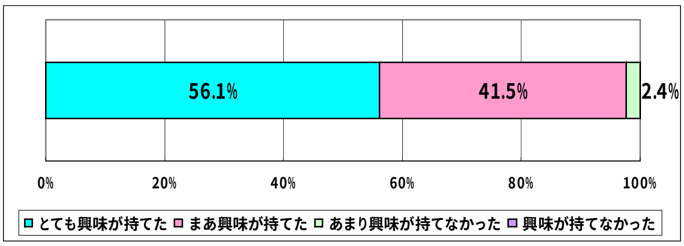
【質問１】
「微分」の学習の発展として，「ニュートン法」を利用した方程式の実数解の近似値の求め方を学習しました。どうでしたか？



【質問２】
表計算ソフトを使用し，数列の項の変化を調べました。パソコンの操作について，どうでしたか？



【質問３】
解の近似値を求めるためにコンピュータを使用しました。面倒な計算をさせ，数列が収束する様子を見ようとするためです。どうでしたか？



【質問４】この授業について感想を書いてください。

質問４の主な回答は次のとおりであった。「コンピュータを使用した数学の授業が初めてであり，新鮮に感じられた」という感想が多かった。また，数列の項の値が表になって現れるため，その変化の様子が捉えやすかったようである。

・今まで求めることのできなかった方程式の実数解を，表計算ソフトを使って簡単に求めることができることに興味をもちました。パソコンを使った数学がとても新鮮に感じられました。
・コンピュータの操作の仕方がわかってから面白くなりました。次に機会があるときは三角関数や指数関数の方程式の解の近似値を求めたいです。
・解が一度近似されると何項後になってもずっとその値が表示されるのが，当たり前のことだがおもしろかった。
・入力のしかたがわかればｅに収束する様子等も見てみたかった。
・数列の収束するのがよくわかったし，やっていて興味がもてたし，びっくりもした。大学でまたふれられたらいいなと思った。自分は工学部志望なので大学へ行くのが楽しみになった。
・収束のスピードが速く，けっこう大きい値を代入してもすぐに収束して興味深かった。家にもパソコンがあるので，自分でいろいろやってみようと思った。
・いつもグラフや計算の処理を自分でやっているので，コンピュータを使って分析するのは新鮮だった。コンピュータを使うのはあまり慣れていないけれど，使いこなせば理解を深めるのに効果的だと思った。

（５）授業における数学的活動の考察

Ⅰ　コンピュータを活用して方程式の解の近似値を求める。（→D）

操作手順を丁寧に示したプリントを用意し，それに基づいて，ワークシートの準備までは自主的に作業をさせた。予想したとおり，初めは表計算ソフトの操作に手間取っていた。うまく進められない生徒に対しては，その席へ行き，操作について個別にアドバイスをした。パソコンの画面上に現れる計算結果の意味を次第に把握できるようになると，おもしろがって操作していた。

方程式(＊)について解の近似値を計算するための表（**図５**）を作ると，数列の第７項以後に表示された値がすべて同じになる。作成した表を見ることで，数列が収束するイメージがつかみやすくなったようだ。

コンピュータを使う授業の際には，その操作や画面を目で追うことだけに意識が集中してしまいがちである。あくまでも数学の現象を分析するための道具を使っているのであり，どのような現象の分析のために使用しているのかを意識させなければならない。

Ⅱ　ニュートン法の漸化式で定まる数列について，初項の値によりその極限値が変化する理由を，曲線とその接線をイメージして考える。（→A，B）

コンピュータの計算結果を表にすることで終わりにし，それが示す数学の現象を考えないことがないように注意した。そこで，練習問題を用意して，計算の意味を考えるように仕向けた。曲線や接線についてこれまでに学んだ知識を活かし，ニュートン法の原理を考えながら計算結果の合理性を検討させたかった。多くの生徒がねらいどおりの活動をしていたことは，活動の観察やレポートの内容から判断できた。

また，授業後のアンケート調査において，「三角関数や指数関数の方程式の解の近似値を求めたいです」，「ｅに収束する様子等も見てみたかった」という感想があった。授業で考えたのは多項式の方程式だけであったが，解の近似値を求める方法を，さらに他の種類の関数にまで発展させて考えようとする姿勢を持った生徒がいたことはとても喜ばしいことであった。

Ⅲ　考察した結果をレポートにまとめる。（→C）

授業中の課題をレポートとしてまとめさせた。学んだことや新たな発見を，根拠を明らかにして自分の表現で述べさせることを目的にした。方程式の実数解が曲線とｘ軸の共有点のｘ座標であること，曲線の形（増減，凹凸）と接線の傾きの関係によって，接線のｘ切片が変化することを考えながら，コンピュータの計算結果を分析して，ニュートン法の原理を理解させたかった。

練習２については，全員がコンピュータを使って近似値を求められていた。

また，練習３については，「違いが生じる理由」を述べているレポートは全体の３分の２であり，よくまとめてある場合には，「数列は初項から最も近くにある解に収束する」

といったような内容が多かった。２人のレポート（**図６，７**）を紹介する。**図７**のレポートの最後に，次のような興味深いこと（**図８**）が書かれていた。

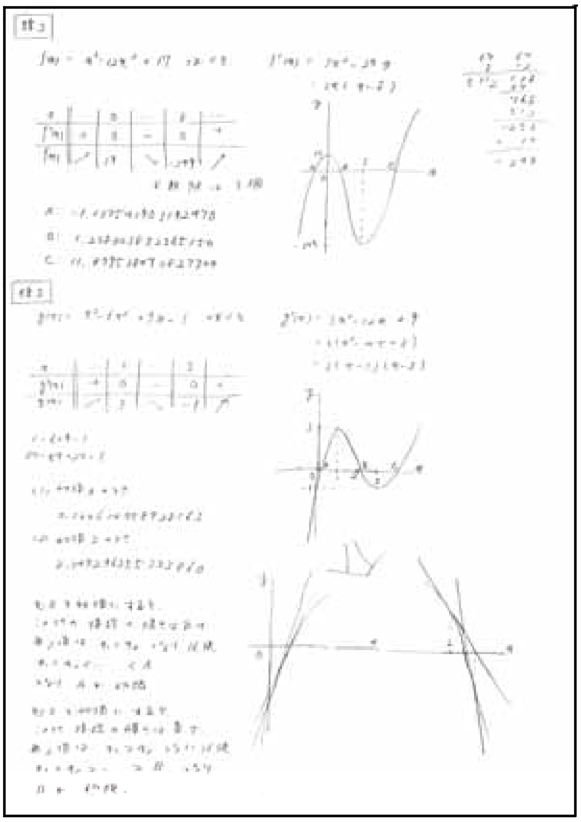


図６　レポート

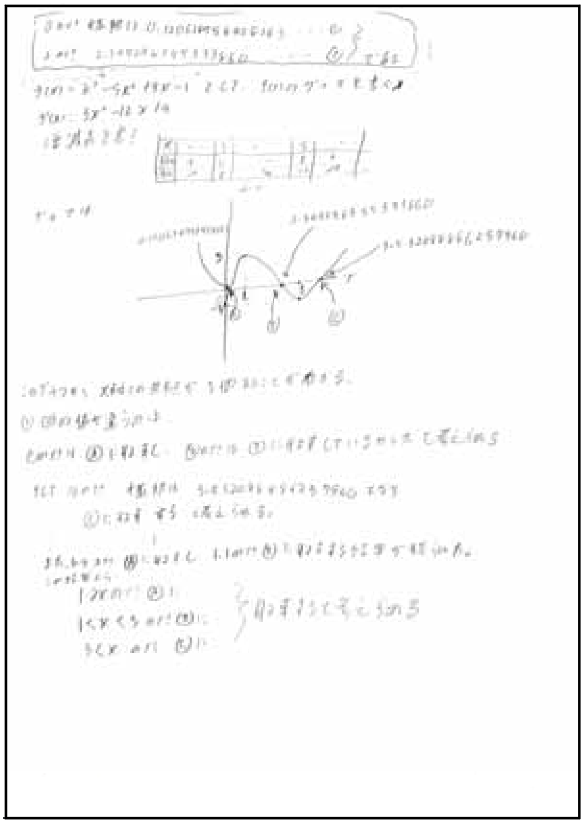


図７　レポート

練習３は方程式

$$x^3-6x^2+9x-1=0$$

の解について，その近似値を考える問題である。このレポート中のⒶとは方程式の解0.1206147…（以下これをαとする）であり，Ⓑ，Ⓒはそれぞれ方程式の解 2.3472963…（＝β），3.5320888…（＝γ）である。xは初項である。

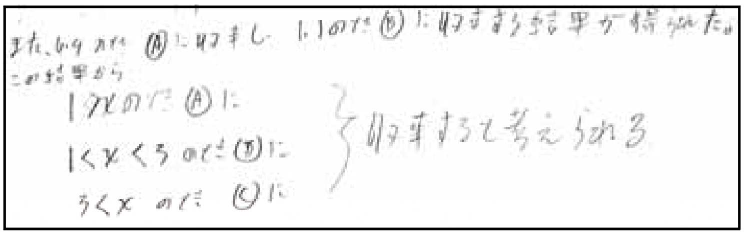


図８　レポート（図７）の一部

関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ のグラフは**図９**のようになる。このレポートの記述で，「x＜１のときαに収束し，３＜x のときγに収束する」ことは正しい。ところが，「１＜x＜３のときβに収束する」というのは誤りである。初項が１より大きく３より小さければ，数列の極限値が必ずしもβになるとは限らないのである。初項が２に近いときは極限値がβになるのであるが，初項が１や３に近いときには，その値によって，ニュートン法の漸化式で定まる数列が途中で途切れてしまうこともあるし，極限が存在したとしてもそれはαまたはγである。

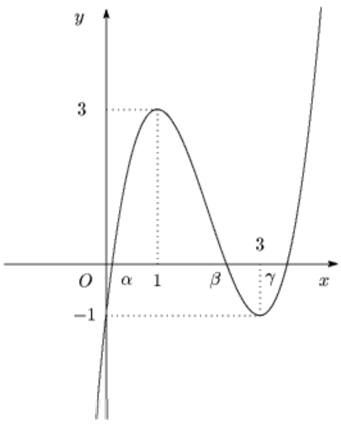


図９　f(x) のグラフ

これらのことについて，その後の授業で取り上げ，詳しく考えさせることにした。初項が１や３に近いとき，ニュートン法の漸化式で定まる数列の極限を考えることは複雑で難しい。その際用いたプリントの一部が**図10**である。

練習問題を作成したときは，生徒がそこまで踏み込んで考えることを想定していなかった。思いがけない展開となったが，こうした考えが他の生徒の興味・関心を引き出すことになり，授業が大いに盛り上がった。レポートを作成させ，生徒の考えや判断過程を知ることができたのは，とても有意義であった。

また，こうした学習ができた最大の要因は，コンピュータを利用して自力では到底できない計算結果を分析できたことである。生徒たちは，ニュートン法のデリケートな部分の考察にまで発展でき，「無限」や「極限」という概念の神秘性を感じることができたに違いない。

ニュートン法　練習3について

初項	極限値
-1	0.120614758428183
-0.9	0.120614758428183
-0.8	0.120614758428183
-0.7	0.120614758428183
-0.6	0.120614758428183
-0.5	0.120614758428183
-0.4	0.120614758428183
-0.3	0.120614758428183
-0.2	0.120614758428183
-0.1	0.120614758428183
0	0.120614758428183
0.1	0.120614758428183
0.2	0.120614758428183
0.3	0.120614758428183
0.4	0.120614758428183
0.5	0.120614758428183
0.6	0.120614758428183
0.7	0.120614758428183
0.8	0.120614758428183
0.9	0.120614758428183
1	×
1.1	3.532088886237960
1.2	3.532088886237960
1.3	3.532088886237960
1.4	2.347296355333860
1.5	2.347296355333860
1.6	2.347296355333860
1.7	2.347296355333860
1.8	2.347296355333860
1.9	2.347296355333860
2	2.347296355333860
2.1	2.347296355333860
2.2	2.347296355333860
2.3	2.347296355333860

α＝0.1206147…，β＝2.3472963…，γ＝3.5320888…　とする。初項が1より小さいときは極限値はαになり，初項が3より大きいときは極限値はγになる。また，初項が2に近いときは極限値はβになる。一方，初項が1よりも大きく，しかも1に近いときや，あるいは3よりも小さく3に近いときには，初項の値だけで極限値を特定することはできない。これらのときには，2項，3項，… の値を調べなければ極限値はわからない。

1.3	3.532088886237960
1.31	3.532088886237960
1.32	3.532088886237960
1.33	0.120614758428183
1.34	0.120614758428183
1.35	3.532088886237960
1.36	2.347296355333860
1.37	2.347296355333860
1.38	2.347296355333860
1.39	2.347296355333860
1.4	2.347296355333860

1.32	3.532088886237960
1.321	3.532088886237960
1.322	3.532088886237960
1.323	0.120614758428183
1.324	0.120614758428183
1.325	0.120614758428183
1.326	0.120614758428183
1.327	0.120614758428183
1.328	0.120614758428183
1.329	0.120614758428183
1.33	0.120614758428183
1.331	0.120614758428183
1.332	0.120614758428183
1.333	0.120614758428183
1.334	0.120614758428183
1.335	0.120614758428183
1.336	0.120614758428183
1.337	0.120614758428183
1.338	0.120614758428183
1.339	0.120614758428183
1.34	0.120614758428183
1.341	0.120614758428183
1.342	0.120614758428183
1.343	0.120614758428183
1.344	0.120614758428183
1.345	0.120614758428183
1.346	3.532088886237960
1.347	3.532088886237960
1.348	3.532088886237960
1.349	3.532088886237960
1.35	3.532088886237960
1.351	0.120614758428183
1.352	2.347296355333860
1.353	2.347296355333860

1.35	3.532088886237960
1.3501	3.532088886237960
1.3502	3.532088886237960
1.3503	3.532088886237960
1.3504	3.532088886237960
1.3505	3.532088886237960
1.3506	3.532088886237960
1.3507	3.532088886237960
1.3508	0.120614758428183
1.3509	0.120614758428183
1.351	0.120614758428183
1.3511	0.120614758428183
1.3512	0.120614758428183
1.3513	3.532088886237960
1.3514	0.120614758428183
1.3515	2.347296355333860
1.3516	2.347296355333860
1.3517	2.347296355333860

図10　練習３の方程式について，ニュートン法の数列の初項と極限値の関係

初項が1.3に近いときの極限値を，初項の間隔を小さくしていって調べている。
極限値がγになる初項の区間と，αになる区間が交互に並んでいることが予想される。

5　おわりに

数学的活動を通して，生徒の主体的で創造的な学習を促進し，思考力，判断力，表現力を育成することは大きな課題である。数学的活動は，生徒の学習に対する意欲，既に得ている数学的知識・技能，さらに他の教科・科目の学習内容などを分析し，その内容や方法を工夫して計画を立て，授業において実践しなければならない。

この度，これまでの２年間で実施した授業の中から，２つの実践を取り上げ考察した。１つ目の実践では，積分の導入において，積分を用いて面積を求めることの意味や原理を理解させることを重視した。２つ目の実践では，コンピュータを利用して方程式の近似解を求める方法を考えさせた。生徒のレポートの内容から，その現象をさらに深く考えるきっかけを与えられ，授業を思わぬ方向へ発展させることになり印象深かった。いずれにおいても，授業の目標を定め，その達成のために効果的な数学的活動を模索した。これらは，うまく生徒に受け入れられ，わかりやすかったという評価を得た。

授業の実践において，何よりも重要なことは目標設定である。そして，生徒の興味・関心を引き出し，変化を与えることである。そのための方法として，数学的活動を考えることは大切なことである。

教科書の内容だけに重きを置き，そこに記載されたとおりに進めるだけの授業ではなく，数学の学習を通して生徒に新たな発見をさせ，他の科学の分野や日常にある具体的な事象の考察に役立つという認識をさせる授業が求められている。また，人間が築いてきた文化のすばらしさを実感させ，さらに学び続けていくという意欲を高めさせる必要がある。そのためには，生徒の主体的な活動が不可欠であり，授業は創造性の基礎を培うものでなければならない。そして，教師自身が創造的でなければならず，指導方法の試行錯誤をいとわず，自己の実践を常に評価し，謙虚に反省し改善していくべきである。

数学的活動の工夫は，授業をより良いものにしていく決め手であり，その研究は自己の授業力を高めるための挑戦であると考えている。具体的な事象を数学化して数学的な課題を設定し，それを数学的に考察・処理し数学的知識を構成し，さらにその理解を深め，そして得られた数学的知識を具体的な事象の考察に役立てる。今後も，そのような思考活動のサイクルを根底に据えた授業展開を目指し取り組んでいきたい。

本研究を進めるにあたって，県教育庁指導課，教科指導員の方々には多くの御助言，御指導を賜った。また，教科研究員の方々とは２年間共に切磋琢磨し合った。さらに，こうした好機が得られたのは，校長，教頭各先生方のお陰である。お世話になった方々に対し，ここに深厚な謝意を表する。

【参考文献】

『高等学校学習指導要領解説 数学編』　平成21年７月　文部科学省