(各位の数 +1) の積及びその拡張

千葉県立船橋高等学校 普通科
西方 友哉

1 研究目的

例えば、$253 \to (2+1)(5+1)(3+1) = 72, 4678 \to (4+1)(6+1)(7+1)(8+1) = 2520$ とするように、ある非負整数を 10 進法で表記したときの各位に 1 を足したものの積を考える (1 を足してから掛ける理由は、例えば $253 \to 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ のようにすると、例えば 105 などの 0 を含む数がある場合はすべて 0 になり、また $253 = \ldots 000253$ と解釈すると全ての数で 0 になってしまうということになるため、1 を足すことでこれを解決している)。この積を元の数に対する「数字積」と呼ぶことにする。数字積の性質について考察する。

なお、ここでは $\mathbb{N}_0$ は負でない整数 (非負整数) 全体の集合とする ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)。

2 定義

0 以上 $b-1 (b \in \mathbb{N}_0, 2 \leq b)$ 以下である $n+1 (n \in \mathbb{N}_0)$ 個の整数 $a_0, \ldots, a_n$ に対して、$x = \sum_{k=0}^{n} b^k a_k$ とすると、x の b 進数字積 $f_b(x)$ は以下のように定義される。

$$f_b(x) = \prod_{k=0}^{n} (a_k + 1)$$

尚、ここでは $f(x) = f_{10}(x)$ とする。

3 考察

3.1 大小関係

例えば、10 進数字積では $f(18) = 18$ となり、不変となる。このような数が他に無いかを、数字積と元の数との大小関係を求めることにより調べた。

尚、3.1 節では

- $b, n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_0$
- $2 \leq b$
- $a_0, \ldots, a_n \leq b-1$
- $(n = 0) \lor (1 \leq a_n)$
- $x = \sum_{k=0}^{n} b^k a_k$

とする。つまり、x は b 進法で $n+1$ 桁の数で、a_k は x の下から $k+1$ 桁目の数である。$1 \leq n$ のとき、すなわち x が 2 桁以上のときは、a_n、すなわち x の最高位は 1 以上である。

- $n = 0$(x が 1 桁) の場合
  $f_b(x) = x + 1$ より $f_b(x) > x$
- $n = 1$(x が 2 桁) の場合

$$\begin{aligned} x - f_b(x) &= (ba_1 + a_0) - (a_1 + 1)(a_0 + 1) \\ &= a_1(b - a_0 - 1) - 1 \end{aligned}$$

(i) $f_b(x) \leq x$ の場合

$$\begin{aligned} x - f_b(x) &\geq 0 \\ a_1(b - a_0 - 1) - 1 &\geq 0 \\ 1 &\leq a_1(b - a_0 - 1) \\ 1 \leq a_1 \text{より } a_0 &\leq b - 1 - \frac{1}{a_1} \leq b - 2 \\ \text{よって } a_0 &\leq b - 2 \\ \text{等号成立は } x &= 2b - 2 (a_1 = 1, a_0 = b - 2) \end{aligned}$$

(ii) $f_b(x) > x$ の場合

これは (i) の否定だから、$a_0 = b - 1$

- $2 \leq n$(x の桁数が 3 以上) の場合

$$a_0, \ldots, a_{n-1} = b - 1 \text{ のとき } f_b(x) > x \quad (1)$$
$$\text{それ以外のとき } f_b(x) < x \quad (2)$$

(証明) $x' = x - b^n a_n$(すなわち x' は x の最高位を削ったもの) とする。

$n = k$ のとき (1) が成り立つとする (実際 $k = 1$ のときこれは成り立つ)。

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} x &= b^{k+1} a_{k+1} + x' \\ f_b(x) &= (a_{k+1} + 1) f_b(x') \\ &= f_b(x') a_{k+1} + f_b(x') \\ \text{よって } x - f_b(x) &= (b^{k+1} - f_b(x')) a_{k+1} + (x' - f_b(x')) \end{aligned}$$

(i) $a_0, \ldots, a_k = b - 1 \iff x' = b^{k+1} - 1$ のとき

$$\begin{aligned} f_b(x') &= f_b(b^k a_k + b^{k-1} a_{k-1} + \cdots + a_0) \\ &= (a_k + 1)(a_{k-1} + 1) \ldots (a_0 + 1) \\ &= b^{k+1} \\ \text{よって } x - f_b(x) &= (b^{k+1} - b^{k+1}) a_{k+1} + \{(b^{k+1} - 1) - b^{k+1}\} \\ &= -1 \\ &< 0 \\ \Leftrightarrow f_b(x) &> x \end{aligned}$$

(ii) (i) 以外のとき

$f_b(x')$ が最大になり、$f_b(x') > x'$ となるのは

$a_k = b - 2, a_0, \ldots a_{k-1} = b - 1 \iff x' = (b - 1) b^k - 1$ のときで、このとき

$$\begin{aligned} f_b(x) &= (a_k + 1)(a_{k-1} + 1) \ldots (a_0 + 1) \\ &= (b - 1) b^k \\ &= x' + 1 \\ &= b^{k+1} - b^k \end{aligned}$$

より、$f_b(x') \leq x' + 1, f_b(x') \leq b^{k+1} - b^k$ だから、

$x - f_b(x) = (b^{k+1} - f_b(x')) a_{k+1} + (x' - f_b(x')) \geq b^k a_{k+1} - 1 > 0$

よって $f_b(x) < x$

(i)(ii) より、$n = k + 1$ の場合も (1)(2) を満たす。

よって (1)(2) が示された。

以上のことをまとめると、非負整数 x を b 進法で表したとき

- x が 1 桁のとき x の b 進数字積は x よりも大きくなる。
- 少なくとも 1 の位から最高位の前の位までの数が全て $b-1$ のとき (10 進法の例では $x = 19, 599, 7999, 999999$ など)
  x の b 進数字積は x よりも大きくなる。
- $x = 2b-2$ のとき (10 進法では $x = 18$)
  x の b 進数字積は x と等しくなる。
- 上 3 つのどれでもない場合
  x の b 進数字積は x よりも小さくなる。

3.2 総和

3.2 節における $n, a_0, \ldots, a_n, x, x'$ の定義は 3.1 節で用いたものと同じとし、$S_b(x) = \sum_{k=0}^{x} f_b(k)$ とする ($S(x) = S_{10}(x)$)。

このとき、次の 2 つの定理が成り立つ。

定理 1

$$S(10x+9) = 55S(x)$$

(証明) (i) $x = 0$ のとき

$S(0) = 1, S(9) = 55$ より

$S(10 \cdot 0 + 9) = 55S(0)$

(ii) $x = m$ で成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned}
S(10(m+1)+9) &= S(10(m+1)-1) + \sum_{k=0}^{9} f(10(m+1)+k) \\
&= S(10(m+1)-1) + \sum_{k=0}^{9} f(k)f(m+1)(※1) \\
&= S(10(m+1)-1) + f(m+1)\sum_{k=0}^{9}(k+1) \\
&= S(10(m+1)-1) + 55f(m+1) \\
&= S(10m+9) + 55f(m+1) \\
&= 55S(m) + 55f(m+1) \\
&= 55(S(m) + f(m+1)) \\
&= 55S(m+1)
\end{aligned}$$

より $x = m+1$ でも成り立つ。

(i)(ii) より題意は満たされた。

(※ 1)a, k, n が非負整数かつ $0 \leq k < 10^n \Rightarrow f(10^n a + k) = f(a)f(k)$ を利用。

$$\begin{aligned}
\text{例}:(10^2 \cdot 3 + 26) &= f(326) \\
&= (3+1)(2+1)(6+1) \\
&= f(3)f(26)
\end{aligned}$$

使用例

$$\begin{aligned}
S(29) &= S(10 \cdot 2 + 9) \\
&= 55S(2) \\
&= 55 \cdot 6 \\
&= 330
\end{aligned}$$

定理 2

$$1 \leq x \text{ のとき}, S(x) = 55^n T(a_n) + (a_n+1)S(x') \quad \text{ただし } T(m) = \sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$$

(証明)

$$\begin{aligned} S(x) &= S(10^n a_n + x') \\ &= S(10^n a_n - 1) + \sum_{k=0}^{x'} f(10^n a_n + k) \end{aligned} \tag{1}$$

定理 1 より $S(10(x+1)-1) = 55S(x)$ だから

$$\begin{aligned} S(10^n a_n - 1) &= S(10((10^{n-1}a_n - 1)+1)-1) \\ &= 55S(10^{n-1}a_n - 1) \\ &= 55^2 S(10^{n-2}a_n - 1) \\ &= 55^n S(a_n - 1) \\ &= 55^n T(a_n)(\text{※ } 2) \end{aligned} \tag{2}$$

また、$k \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq x'$ とすると $f(10^n a_n + k) = f(a_n)f(k) = (a_n+1)f(k)$ だから

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{x'} f(10^n a_n + k) &= \sum_{k=0}^{x'} (a_n+1)f(k) \\ &= (a_n+1)\sum_{k=0}^{x'} f(k) \\ &= (a_n+1)S(x') \end{aligned} \tag{3}$$

(1)(2)(3) より

$$S(x) = 55^n T(a_n) + (a_n+1)S(x')$$

(※ 2)a が非負整数かつ $0 \leq a \leq 9 \Rightarrow S(a) = T(a+1)$ を利用。

$$\begin{aligned} \text{例}: S(4) &= f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4) \\ &= 1+2+3+4+5 \\ &= T(5) \end{aligned}$$

使用例

$$\begin{aligned} S(27) &= 55T(2) + 3S(7) \\ &= 55T(2) + 3(T(7) + 8S(0)) \\ &= 55 \cdot 3 + 3(28+8) \\ &= 273 \end{aligned}$$

このように、定理 2 を用いると、$f(0), f(1), \ldots, f(x)$ の値を全て求めることなく $S(x)$ の値を計算できる。ここで $1 \leq x$ のとき $f(x) = S(x) - S(x-1)$ だが、これを $x = 0$ の場合にも適用して $S(0) - S(-1) = f(0)$ とすると、$S(0) = f(0) = 1$ より $S(-1) = 0$ となる。また $S(-1)$ に定理 1 を適用すると

$$\begin{aligned} S((-1)\cdot 10 + 9) &= 55S(-1) \\ S((-1)\cdot 10 + 9) &= S(-1) \end{aligned}$$

上の 2 式より

$$\begin{aligned} 55S(-1) &= S(-1) \\ S(-1) &= 0 \end{aligned}$$

よってこの場合も $S(-1) = 0$ となる。
一般的な $f_b(x)$ の総和でも、$b = 10$ の場合と同じく以下の 2 定理が成立する (証明略)

定理 $1'$: $S_b(b(x+1)-1) = T(b)S_b(x)$
定理 $2'$: $S_b(x) = T(b)^n T(a_n) + (a_n+1)S_b(x')$

3.3 定義域の拡張

3.2 節で求めた定理 1:$S(10x+9) = 55S(x)$ を用いて、変数を非整数に拡張することを考える。

例えば、$f(3.5)$ を求めたい場合、まずは $S(3.5)$ を次のように求めて、

$$\begin{aligned} S(3.5 \cdot 10 + 9) &= 55S(3.5) \\ S(44) &= 55S(3.5) \\ 625 &= 55S(3.5) \\ S(3.5) &= \frac{625}{55} \end{aligned}$$

同様に求めた $S(2.5) = \dfrac{390}{55}$ を用いて

$$\begin{aligned} f(3.5) &= S(3.5) - S(2.5) \\ &= \frac{235}{55} = 4.\dot{2}\dot{7} \end{aligned}$$

このように計算することで、小数点以下 1 桁までの数の (10 進) 数字積を計算することができる。

また、小数点以下 2 桁以降も、定理 1 を繰り返し用いれば、

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{S(10x+9)}{55} \\ &= \frac{S(10(10x+9)+9)}{55^2} \\ &= \frac{S(100x+99)}{55^2} \\ &= \frac{S(1000x+999)}{55^3} \\ &\vdots \\ &= \frac{S(1\overbrace{00\ldots00}^{k}x + \overbrace{99\ldots99}^{k})}{55^k} \end{aligned}$$

となるため、任意の小数点まで続く有限小数の (10 進) 数字積を計算することができる。

また、$f(3), f(3.1), f(3.14), f(3.141), f(3.1415), f(3.14159), \ldots$ と有限小数の極限をとることで、無理数を含む無限小数の (10 進) 数字積を計算することができる。

上記の計算方法を用いた拡張 (10 進) 数字積の定義を以下に記す。

S 関数: 定義域を $x \in \mathbb{R}, -1 \leq x$ とする関数 $S(x)$ は以下のように定義される。

・ $x = -1$ のとき

$$S(-1) = 0$$

・ $x = 0$ のとき

$$S(0) = 1$$

・ $x \in \mathbb{N}$ のとき

$$S(x) = 55^{n(x)} T(t(x)) + (t(x)+1)S(x')$$

ただし、$n(x)$ は x の桁数 -1、$t(x)$ は x の最高位の数、x' は x の最高位を削ったもの

・$x \notin \mathbb{Z}$ のとき

$$S(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{S(\lfloor 10^k x \rfloor + 10^k - 1)}{55^k}$$

ただし $\lfloor x \rfloor$ は x の整数部分である

f 関数: 定義域を $x \in \mathbb{N}, 0 \leq x$ とする関数 $f(x)$ は以下のように定義される。

$$f(x) = S(x) - S(x-1)$$

ここで、S 関数の定義の極限式を $k \to 4$ としたときのグラフを描く (グラフの描画には「Desmos Graphing Calculator(`https://www.desmos.com/calculator`)」を用いた)。

図 1 は $y = f(x)$ のグラフの $0 \leq x \leq 100$ の部分である。

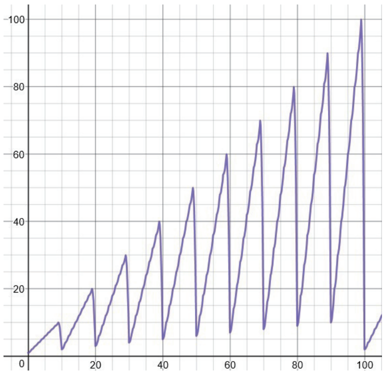

図 1　$y = f(x)(0 \leq x \leq 100)$

これを見るとギザギザとした直線のように見え、全ての点が連続しているように見える。

これを拡大したものが図 2 である。先ほど直線のように見えた部分にいくつかの凹凸が見られる。これをさらに拡大したものが図 3 である。

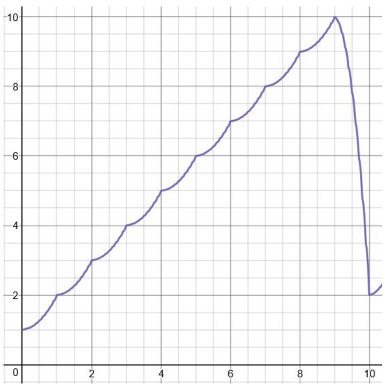

図 2　$y = f(x)(0 \leq x \leq 10)$

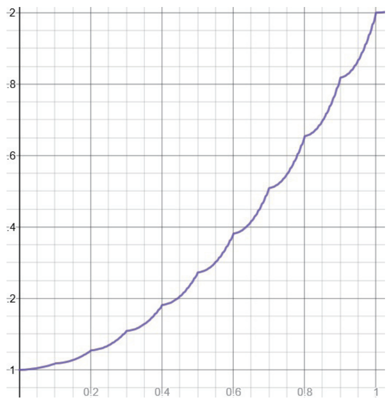

図 3　$y = f(x)(0 \leq x \leq 1)$

これは図 2 の"凹"のうち 1 つを拡大したものだが、その中にもさらにいくつか凹凸が見られる。これらのグラフから、$f(x)$ はその定義域において常に連続であり、どの点でも微分不可能であると予想できる。

4　今後の展望

今後は、以下に箇条書きしたものを中心に研究しようと思っている。

- x が $f(x)$ の整数倍であるような数 x の存在
- 非自然数進法や負数進法、位によって繰り上がる数の違う記数法 (例:「二五進法」2 と 5 を底とする記数法) の場合の数字積の性質
- $f(x)$ の x を 0 より小さい数に拡張する
- 3.3 節の最後に述べた連続性と微分不可能性の証明

5　感想

テーマが決まるのが少し遅く、夏休み中もあまり進行しなかったが、二学期に入ってから大幅に考察が進み、楽しくやりがいのある研究が出来た。
ただ、発表練習やポスター作製に追われて研究が進まない時期がが長引き、予想した内容も最後まで証明できなかったのが残念である。
大学進学後の研究活動にもここで得た経験と教訓を生かそうと思う。