ボールが最も遠くに飛ぶときの法則の一般化

The Generalization of The Law when a Ball Flies Farthest

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
橋爪智紀

はじめに（研究背景）

私は中学生の時に,空気抵抗を考慮しない斜方投射について
「発射するときの高さ,速さを変えず,角度だけ変えるという条件の中で最も飛ぶとき,
発射角＋落下角＝90°　という関係が成立する」
という法則を発見した.
この法則が他の条件(空気抵抗,風,地面の起伏など)を変えたときにも成立するかどうか調べるため,今回の研究を行った.
用語の定義
空気抵抗係数：空気抵抗とボールの速さの比例定数
投射角：投げ始めた瞬間の,ボールの軌道の接線と,水平面の為す角
着地点：ボールの描く軌道が最初に地面に着く点
着地角：着地点における,ボールの軌道の接線と,水平面の為す角
飛距離：着地点のx座標
着地時の傾き：着地点における,ボールの軌道の接線の傾き

目的

空気抵抗,風,地面の起伏などを考慮する斜方投射でも同様の法則が成立するかどうか確かめることである.

本論

前提条件は以下の通りである.
・原点から,質量$m(kg)$の質点のボールを速さ$v(m/s)$,投射角θで発射する.
・ボールは常に鉛直下向きに$g(m/s^2)$の大きさの重力加速度を受け続ける.
・地面の形は関数$f(x)$で表わされるものとする. $f(x)$は任意の実数で微分可能なものとする.
・動いている物体には粘性抵抗(空気抵抗の一種)が働く.
物体の受ける抵抗力$\vec{F}(N)$はボールの速度$\vec{V}(m/s)$と空気抵抗係数k,
そして風のx方向の速度w_xとy方向の速度w_yを用いて,

$$\vec{F} = -k(\vec{V} - (\overrightarrow{w_x} + \overrightarrow{w_y}))$$

と表される.
・ボールの質量m,初速v, 重力加速度g,空気抵抗係数k,風の速度w_x, w_yは定数とする.
・$m, v, g > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$　$f(0) \leqq 0$　とする.
・飛距離の最大値が存在しない場合は考えない.

計算過程

$k=0$のとき(空気抵抗がないとき)について考える.

x方向の力を受けないため,x方向には等速直線運動をする.

初速は$v_x = v\cos\theta$であるから,$x = v\cos\theta\, t$である.

y方向には重力加速度が働いているので,y方向の速度は$v_y = -gt + v\sin\theta$である.

両辺をtで積分して

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\theta\, t$$

を得る(原点から投射しているので$t=0$のとき$y=0$である).

ボールが地面に着地するとき,滞空時間を$T(T>0)$とすると

$$f(x) = -\frac{1}{2}gT^2 + v\sin\theta\, T$$

である.投射角を変化させたとき,滞空時間も変化するので,Tはθの関数である.

飛距離は,xについての連立方程式

$$x = v\cos\theta\, T$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}gT^2 + v\sin\theta\, T$$

の解のうち,最小のものである.

飛距離は投射角が 1 つに定まると唯一つに定まるので,xはθの関数である.

投射角を変化させたときに飛距離が最大になるとき,$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = 0$である.

$$x = v\cos\theta\, T$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}gT^2 + v\sin\theta\, T$$

の両辺をθで微分する.

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = -v\sin\theta\, T + v\cos\theta\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}} \qquad f'(x)\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = -gT\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}} + v\cos\theta\, T + v\sin\theta\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}}$$

最も遠くに飛ぶときの投射角をθ'とする.

$\theta = \theta'$のとき,$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}} = 0$であるから,

$$0 = -v\sin\theta'\, T + v\cos\theta'\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}} \qquad 0 = -gT\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}} + v\cos\theta'\, T + v\sin\theta'\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}}$$

左の式より,

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}} = \tan\theta'\, T$$

を得る.これをもう 1 つの式に代入する.

$$0 = -gT\tan\theta'\, T + v\cos\theta'\, T + v\sin\theta'\tan\theta'\, T$$

変形して

$$T = \frac{v}{g\sin\theta'}$$

を得る.これは,ボールが最も遠くに飛ぶときの滞空時間である.
投げてからt秒後のボールの軌道が描く接線の傾きは

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-gt+v\sin\theta'}{v\cos\theta'}$$

ボールが地面に着地するとき$t=T$であり,ボールが最も遠くに飛ぶときは$T=\frac{v}{g\sin\theta\prime}$である.これを代入することで

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)$$

を得る.従って,着地時の傾きは$-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)$である.

$k\neq 0$のとき(空気抵抗があるとき) について考える.
運動方程式をたてる.

$$-k(v_x-w_x)=m\frac{\mathrm{dv_x}}{\mathrm{dt}}\qquad -k(v_y-w_y)-mg=m\frac{\mathrm{dv_y}}{\mathrm{dt}}$$

これと初期条件より,ボールの軌道は

$$x=\frac{m}{k}(v\cos\theta-w_x)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+w_xt$$

$$y=\frac{m}{k}\left(v\sin\theta-w_y+\frac{mg}{k}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+\left(w_y-\frac{mg}{k}\right)t$$

と表される. 滞空時間を$T(T>0)$とすると

$$f(x)=\frac{m}{k}\left(v\sin\theta-w_y+\frac{mg}{k}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}T}\right)+\left(w_y-\frac{mg}{k}\right)T$$

$$x=\frac{m}{k}(v\cos\theta-w_x)\left(1-e^{-\frac{k}{m}T}\right)+w_xT$$

である.

θのみを動かしてxが最大になるとき,$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}}=0$になることに注意する.

2 つの式の両辺をθで微分し,$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d\theta}}=0$を代入すると,

$$0=\frac{m}{k}v\cos\theta'\left(1-e^{-\frac{k}{m}T}\right)+\left(v\sin\theta'-w_y+\frac{mg}{k}\right)\left(e^{-\frac{k}{m}T}\right)\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}}+\left(w_y-\frac{mg}{k}\right)\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}}$$

$$0=\frac{m}{k}(-v\sin\theta')\left(1-e^{-\frac{k}{m}T}\right)+(v\cos\theta'-w_x)e^{-\frac{k}{m}T}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}}+w_x\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{d\theta}}$$

を得る.2 つの式から$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d\theta}}$を消去し

$$T=\frac{m}{k}\log\left(1-\frac{v}{\cos\theta' w_x+\sin\theta'\left(w_y-\frac{mg}{k}\right)}\right)$$

を得る.これは最も遠くに飛ぶときの滞空時間である.

t秒後の傾きは$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$であり,これは$\frac{v_y}{v_x}$に等しく,

$$v_x=(v\cos\theta-w_x)e^{-\frac{k}{m}t}+w_x$$

$$v_y=\left(v\sin\theta-w_y+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+w_y-\frac{mg}{k}$$

である.従って,最も遠くに飛ぶときの着地時の接線の傾きは

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\left(v\sin\theta'-w_y+\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+w_y-\frac{mg}{k}}{(v\cos\theta'-w_x)e^{-\frac{k}{m}t}+w_x}$$

に

$$t=T=\frac{m}{k}\log\left(1-\frac{v}{\cos\theta' w_x+\sin\theta'\left(w_y-\frac{mg}{k}\right)}\right)$$

を代入したものである.
変形すると

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)$$

を得る.

従って,最も遠くに飛ぶときの着地時の傾きは空気抵抗の有無に関係なく$-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)$である.

これは,最も遠くに飛ぶとき,着地角が$\frac{\pi}{2}-\theta'$であることを示している.
投射角はθ'であるから,最も遠くに飛ぶとき,投射角＋着地角＝$\frac{\pi}{2}$になるという法則が成立する.

結論

　ボールの速さに比例する空気抵抗,風,地面の起伏などを考慮する斜方投射でも
　ボールが最も遠くに飛ぶとき
　投射角＋着地角=90°
　という法則が成立する.

謝辞

　式変形の助言をいただいた京都大学理学部の矢島知明様にここで感謝の意を表す.

研究の経過・反省・感想など

私がこの研究を始めたのは、中学 3 年生の始めでした。その頃は、放送大学の講義を家のテレビで見ていました。ほとんどの内容がわからなかったのですが、1 つだけ理解できた授業がありました。それは、斜方投射の軌道を微分積分を応用して求めるというものでした。そしてふと疑問が起こりました。「本当に投射角 45 度でボールを投げるのがもっとも遠くに飛ぶのだろうか。実は最適な角度は微妙に 45 度からずれているのではないか。」と。私は講義で習った方法で早速計算を始めました。軌道の式を求めて、手でグラフを書きました(後にコンピューターを使いました)。そして実験的に 45 度で 1 番飛ぶということがわかり、大変喜んだのですが、発射地点の高さが 0 でないときについても気になりました(発射地点の高さは積分定数と見ていたために、0 でない場合を考えるのは私にとって自然な発想でした)。発射地点の高さを 0 より高くして、もう 1 度実験(といってもコンピューター上の話ですが)をしたところ、45 度よりも角度を少し小さくした方が飛ぶという事実を発見しました。45 度より飛ぶ角度があるということを知って大変喜びましたが、発射地点の高さが負の時についても気になりました(積分定数であれば、負にするのも自然な発想でした)。再び実験をしたところ、45 度よりも大きな角度で飛びました。自分である程度まとまった性質を自分だけで導けたので十分嬉しかったのですが、何か引っかかりました。何で 45 度で 1 番飛ぶわけではないのか、と。最終的に「着地角が 45 度になるように投げると 1 番飛ぶ。」という仮説を立てました。「着地角」という、普通思いつかないような概念は、ここで思いつきました。着地角を求める方法を自分で考え、早速実験をしたところ、最も遠くに飛ぶときの着地角も発射地点の高さに依存しました。私の仮説ははずれました。モヤモヤした気分で「投射角」と「着地角」を並べて眺めていたときに、2 つを足したら常に 90 度になっていることに気がつきました。斜方投射の法則は偶然発見したのです！この法則は誰か他の人が既に見つけているのではないかと思ったのですが、調べてもこのような法則は見つかりませんでした。自分 1 人で新しい法則を発見できたのかもしれないとなると、大変誇らしく思いました。この研究を夏休みの自由研究として、科学作品展に出展したところ、県で優秀賞を受賞しました。そして、高校でも研究を続けたいなと思うようになり、船高理数科に入学しました。しかし、1 年生の時は研究を発展させるだけの知識が足りなかったため、別の研究をしました。2 年生のとき、変数分離型の微分方程式の解法を独学で学習し、空気抵抗のある斜方投射の軌道を求められるようになりました。この方法を使って空気抵抗のあるときでも同じ法則が成り立つかどうか検証しようとしました。しかし、空気抵抗がないときと違って、方程式が解けない形になっていました。解析的な解法を諦めようかと悩んでいましたが、諦めたくない気持ちの方が強かったです。そこで、本当にその方程式を解く必要があるのか考え、方程式を解かなくて済む解法を発見しました。この解法を発見するときも、計算ミスが 3 カ所あり、全て訂正できるまで証明が完了しませんでした。膨大な式の中から間違いを探すのは非常に大変な作業でした。しかし、証明が完了したときは飛び上がるほど興奮しました。ここまでの研究成果を台湾研修で発表しました。英語で発表するのは思ったより大変なことでしたが、研究成果を異国の人にも伝えられたのは自信になりました。空気抵抗の次に何をやろうかと考えたときに、計算の難しい方の空気抵抗も計算しました。しかし、計算があまりにも複雑になったため、簡単な空気抵抗のある場合の風が吹く場合について考えました。ここで、今までの方法では、ボールの軌道を求められないということに気がつきました。この研究も行き詰まるかと思ったのですが、媒介変数表示を活用すればボールの軌道を表現できると言うことに気がつきました。計算方法を変えたことで、証明方法も変わり

ましたが、最終的に証明が困難だと思っていた、風があるときの法則を自分で証明することができました。ここまで来ると、空気抵抗なしという理想的な限られた条件のみならず、ありとあらゆる時に成立する普遍的な法則であると言うことがわかり、この世界を支配する法則の美しさに感動しました。そして、軌道を媒介変数で求めたことが、予想しなかった結果を生みました。計算の途中過程を考え直したところ、地面が水平面である必要が無いことに気がつきました。なめらかな曲線ならどんな物でも良かったのです(なめらかでなくても、なめらかな曲線で限りなく近似できると考えられるため、地面はおそらくどんな曲線でもいいでしょう)。この結果は意外なもので、最初は自分も疑っていましたが、すごい物を発見したと思って、とても達成感がありました。結果、中学生の時に生じた小さな疑問が、2 年の研究でここまで拡張できるとは正直思っていませんでした。すばらしい研究ができて大変うれしく思います。そして、さらにこの法則を拡張できればいいなと思っています。