テトレーションの高さが無限大のときに収束する条件と収束値の一般化

The Convergence Condition and The Convergence Value When The Height of Tetration is Infinite.

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
中西　流我

はじめに

テトレーションとは自らの冪乗を指定された回数反復する演算である。a を n-1 回 a 乗する演算を ${}^{n}a$ と表し、n を高さ、a を底とする。

ここで $\lim_{n\to\infty} {}^{n}a$ を ${}^{\infty}a$ と表す。

目的

${}^{\infty}a$ が収束する a の範囲を調べることと、${}^{\infty}a$ の収束値を一般化する。

方法

＜a の範囲と収束値の証明＞

（証明１）　${}^{\infty}a$ の収束値

${}^{\infty}a$ が収束すると仮定し、${}^{\infty}a=c$ とおく。$a^{{}^{\infty}a}=a^{c}$ であるので $c=a^{c}$ よって $c=a^{c}$ を c について解けばよい。

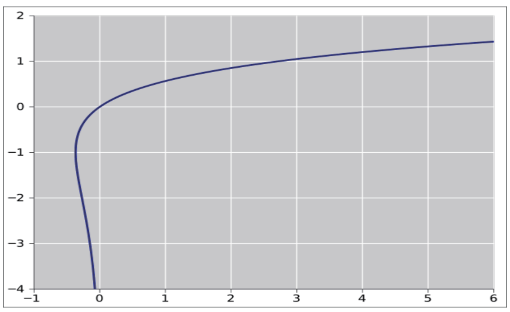
$c=a^{c}$　　$\log_{e}a$ を $\ln(a)$ とする。

$c=e^{c\times\ln(a)}$

$c=-t/\ln(a)$ とおくと

$-t/\ln(a)=e^{-t}$ よって $te^{t}=-\ln(a)$

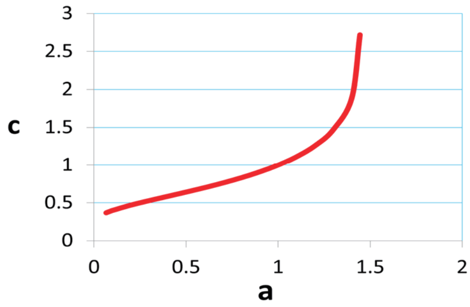
ここでランベルトの W 関数を用いる。ランベルトの W 関数とは $y=xe^{x}$ の逆関数 $x=ye^{y}$ を $y=W(x)$ で表した時の $W(x)$ である。



ランベルトの W 関数

よって $t=W(-\ln(a))$

$c=-W(-\ln(a))/\ln(a)$ である。



$c=-W(-\ln(a))/\ln(a)$

（証明 2）${}^{\infty}a$ が収束する時の a の範囲

a=1 の時${}^{\infty}a=1$ は自明である。${}^{\infty}a$ が収束する時 ${}^{n}a$ が「上に有界かつ単調増加」たは「下に有界かつ単調減少であることは十分条件である。

（Ⅰ） $1<a\leqq e^{1/e}$ の時

n=1 の時、${}^{1}a<e$ である。n=k の時、${}^{k}a<e$ と仮定すると

n=k+1 の時、任意の t について $1<a$ より a^{t} は t について単調増加なので

${}^{k+1}a=a\hat{}\,{}^{k}a<a^{e}\leqq e$

よって任意の n について ${}^{n}a<e$ である。したがって、上に有界である。

また、n=1 の時、$1<a$ より $a<a^{a}\Rightarrow{}^{1}a<{}^{2}a$ である。

n=k の時、任意の k を ${}^{k}a<{}^{k+1}a$ と仮定すると

n=k+1 の時、${}^{k+1}a=a\hat{}\,{}^{k}a<a\hat{}\,{}^{k+1}a\Rightarrow{}^{k+1}a<{}^{k+2}a$ であるので、単調増加である。

したがって $1<a\leqq e^{1/e}$ の時${}^{\infty}a$ は収束する。

（Ⅱ） $e^{-e}\leqq a<1$ の時

任意の正の数 b に対して $a<1$ より $a^{b}<1$ である。また、$a>0$ より ${}^{n}a>0$ である。

$a<1$ より n=1 の時、${}^{1}a<1$

n=k の時、$0<{}^{k}a$ より

n=k+1 の時、${}^{k+1}a=a\hat{}\,{}^{k}a$ なので $0<{}^{k+1}a<1$ 　よって有界

ここで ${}^{n}a$ を $b_{n}={}^{2n-1}a$ と $c_{n}={}^{2n}a$ に分ける。

（ｉ） b_{n} のとき

n=1 の時、$b_{1}=a$ 　$b_{2}=a\hat{}\,a^{a}$ 　$a^{a}<1$ より $a<a\hat{}\,a^{a}$ 　よって $b_{1}<b_{2}$

n=k の時、$b_{k}<b_{k+1}$ と仮定すると

n=k+1 の時、仮定より $b_{k}<b_{k+1}$ なので $a\hat{}\,b_{k}>a\hat{}\,b_{k+1}$

したがって $a\hat{}\,a\hat{}\,b_{k}<a\hat{}\,a\hat{}\,b_{k+1}\Rightarrow b_{k+1}<b_{k+2}$

よって b_{n} は単調増加であり上に有界なので b_{∞} は収束する。

（ⅱ）c_n のとき

n=1 の時、$c_1=a^a$　$c_2=a^\wedge a^\wedge a^\wedge a$　　$1>a^a$ より $a<a^\wedge a^\wedge a$ なので $a^a>a^\wedge a^\wedge a^\wedge a \Rightarrow c_1>c_2$

n=k の時、$c_k>c_{k+1}$ と仮定する。（ⅰ）と同様にして $c_{k+1}>c_{k+2}$ を得る。

よって c_n は単調減少であり下に有界なので c_∞は収束する。

${}^{\infty}a$ が収束することは ${}^{\infty}b={}^{\infty}c$ を示せばよい。

（ⅲ）$b_\infty=c_\infty$であること

$c_\infty=a^\wedge b_\infty$より $b_\infty=a^\wedge b_\infty$

(証明 1)より $b_\infty=-W(-\ln(a))/\ln(a)$

b_n は単調増加関数である。

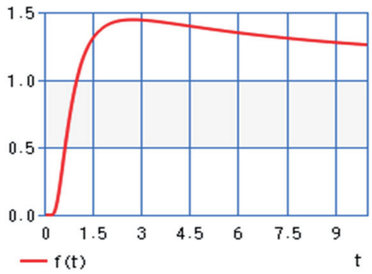
a に e^{-e} を代入すると $b_\infty=1/e$ であり、a＝1 の時は $b_\infty=1$ である。よって、$1/e<b_\infty<1$

$b_\infty=c_\infty$の時 $b_\infty={}^{\infty}a$ であり、$0<{}^{\infty}a<1$ を満たしているので $e^{-e}\leqq a<1$ の時${}^{\infty}a$ は収束する。したがって、$e^{-e}\leqq a<1$、$1<a\leqq e^{1/e}$、a=1 の時すなわち $e^{-e}\leqq a\leqq e^{1/e}$ の時${}^{\infty}a$ は収束する。

(証明 3) $a>e^{1/e}$ の時収束しないことの証明

(証明 1)より $c=a^c$　$c^{1/c}=a$ である。

任意の実数 t に対し $t^{1/t}$ の最大値を求める。



$y=\ t^{1/t}$

両辺の自然対数をとると $\ln(y)=(1/t)\ln(t)$

t で微分すると $y'=(1/t^2)(1-\ln(t))t^{1/t}$

y の最大値は傾きが 0 の時なので $y'=0$ の時である。

$y'=(1/t^2)(1-\ln(t))t^{1/t}=0$

$1/t^2$, $t^{1/t}$ が 0 になることはないので $1-\ln(t)=0$

$t=e$

よってこの時の a の最大値は、c=e の時、$a=e^{1/e}$ よって a の範囲は $a\leqq e^{1/e}$ なので $a>e^{1/e}$ の時${}^{\infty}a$ は収束しない

(証明 4)　$0<a<e^{-e}$ の時

$0<a<e^{-e}$ の時、$c_n=a^\wedge a^\wedge \beta$ と置き、a について微分すると

$(a^\wedge a^\wedge \beta)*a^{\beta-1}*(\beta\ln(a)+1)$ を得る。

c_n が最小の時

$(a^\wedge a^\wedge \beta)*a^{\beta-1}*(\beta\ln(a)+1)=0$ である。

$a^\wedge a^\wedge \beta\neq 0$　$a^{\beta-1}\neq 0$ より

$\beta\ln(a)+1=0$

したがって、$a=e^{-1/\beta}$のとき最小値である。なのでもし$\beta>1/e$ならば$a\hat{}a\hat{}\beta>1/e$

$n=1$のとき$c_1=a^a>1/e$

$n=k$のとき$c_k>1/e$と仮定すると、

$n=k+1$のとき$c_{k+1}>1/e$なので

$c_n>1/e$

次に$b_{k+1}=a\hat{}c_n<a^{1/e}\leqq 1/e$なので

$b_n<1/e$

$0<a<e^{-e}$の時 $c_n>1/e$であり、 $b_n<1/e$なので$b_n\neq c_n$

よって$0<a<e^{-e}$の時 ${}^{\infty}a$は収束しない

結果

$e^{-e}\leqq a\leqq e^{1/e}$のときのみ${}^{\infty}a$は収束し、その収束値は$-W(-\ln(a))/\ln(a)$である。
また$a<e^{-e}$のとき${}^{\infty}a$は振動し、$e^{1/e}<a$のとき${}^{\infty}a$は正の無限大に**発散する。**

結論

結果よりテトレーションの高さが無限大のとき、**底はe^{-e}以上$e^{1/e}$以下の範囲の時に収束する。その収束値はランベルトのW関数を用いて**$-W(-\ln(a))/\ln(a)$で表される。

参考文献

テトレーション-Wikipedia
数学同好会-米子高専・数学科

研究の経過・反省・感想等

テーマを決めることがとても難しかったです。最初は違うテーマをやろうと考えていたが、未解決問題だと知り諦め、その後何度かテーマを決めようと努力したが、数学のテーマ決めはとても難しく、未解決問題やすでに知られているテーマが多く、このテトレーションというテーマに行き着くまで長い時間を要しました。

テトレーションという分野はあまり知られておらず、ネットなどで検索してもあまりいい情報が得られなかったので、多くは自分で考えて証明していきました。この研究の間に高校生の知識を超えた方法を使って証明していったので、調べながら勧めていきましたが、とてもためになったと思います。最終的に、始めに目標としていたところまで証明することができたので満足しています。