

数独の多角形への拡張

Expansion of Sudoku to a Polygon

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
清水 駿介 徳永 竜之介

はじめに

数独とは、図のように 9×9 のマスが正方形に並び、縦・横・ 3×3 マスの各 9 マスに同じ数字を入れてはならないというパズルゲームである。「ナンバープレース」とも呼ばれている。このゲームは世界的にも有名であり、「Sudoku」という名前が多くの人に親しまれている。

このゲームに関する研究は数多く、本校の先行研究の中にも数独の研究がある。今回私達は、数独について調べている中で「Tridoku」と呼ばれる三角形の数独を見つけた。それをもとに私達は四角形以外の数独について考え、新しい形の数独を作り出したいと考えこの研究を始めた。

			1	6		9		
5		4						
2								
	8				3			
								6
			6		5			2
				2	4	3		
	1						7	
						8		

この研究の中で、私達は「初期条件」という言葉を使っている。「初期条件」とは、数独の問題の中に最初から含まれている数字のことであり、右上図において網掛けのマスに入っている数字のことである。プレイヤーはこれらの数字を移動させたり、変更したりすることはできない。

目的

様々な形・大きさの数独を作り、それぞれにルールを定め、その数独が成立する初期条件がどのようなものか見つけ出す。このとき、初期条件の数字の数の最小を研究する。

内容

基本的な数独の形である 9×9 の四角形数独のほかに、右図のような 9×9 の四角形数独のサイズを縮小した 4×4 の四角形数独における初期条件についても研究を行った。

4			2
1			
		3	
	4		1

○ 4×4 四角形数独のルール

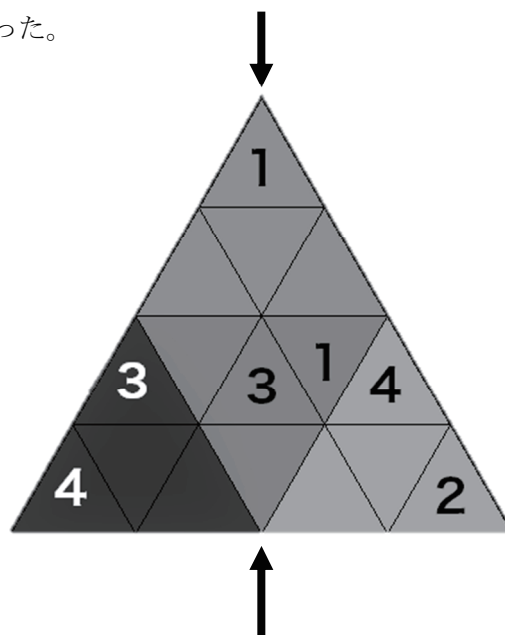
- ・使用できる数字は 1~4 の 4 種類とする。
- ・縦列、横列、 2×2 マスの各ブロックの中に同じ数字を入れてはならない。

また、図形を変えた形として右図のように数独の形を三角形に変え、1 辺の長さを 4 マスにした 4×4×4 の三角形数独においての初期条件について研究を行った。

○4×4×4 の三角形数独のルール

以下のルールを定めた。

- ・使用する数字は 1~4 の 4 種類とする。
- ・2×2×2 の小さな三角形 4 つ(右図においてされている各三角形)の内部で同じ数を入れてはならない。
- ・4×4×4 の大きな三角形の 1 辺 4 マス(辺に接しているマスのみ)上において同じ数を入れてはならない。
- ・三角形の高さにあたる線分上にある 4 マスにおいて同じ数を入れてはならない。ただし、この問題の三角形において三角形の高さとは右図中の矢印で示されている部分のみとする。



方法

研究方法については以下の 2 つの方法を用いた。

○Excel の VBA を利用して計算する方法

参考文献 2 のプログラムをもとに自動で問題を解析し、計算を行った。その計算をもとに初期条件を満たすことができる最小個数を調べた。

【参考文献 2 のプログラムの流れ】

1. エクセルのシートに書かれた問題を 2 次元配列に入れる
2. 配列から数字が入っていない(値が 0)のところを全て見つけ出す
3. 値が 0 のところに 1 から 9 までの数字を入れられるか数独のルールで順番に判定
4. 判定していく中で、数字が入れられる場合は入れる、入れられない場合は次の数字へ
どの数字も入れられない場合は前へ戻る
5. 流れ 2 から 4 を値が 0 のところなくなるまで繰り返す
6. 最終的に求まった配列をシートに書き出す

○人の手を利用して計算する方法

全てのマスが埋まった数独から一つずつ数字を減らし、何回も問題を解いた。徐々に数字を減らし、初期条件を調べた。

結果

○9×9 の四角形数独

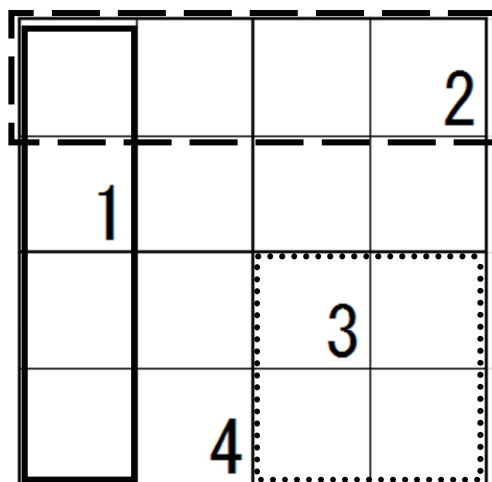
調べたところ、先行研究が見つかった。2012年にフィンランドの 数学者ゲイリー・マクガイアがパソコンを使用して計算し、初期条件において17個の数字があれば解が一つになる問題ができることが発表された。後にこの研究は学会での審議により正しいとされた。

○4×4の四角形数独

初期条件として、右図のように

- ・ 数字が4つある
- ・ その4つの数字が全て異なる
- ・ 同じ辺上またはブロック内に数字が2つ以上入っていない

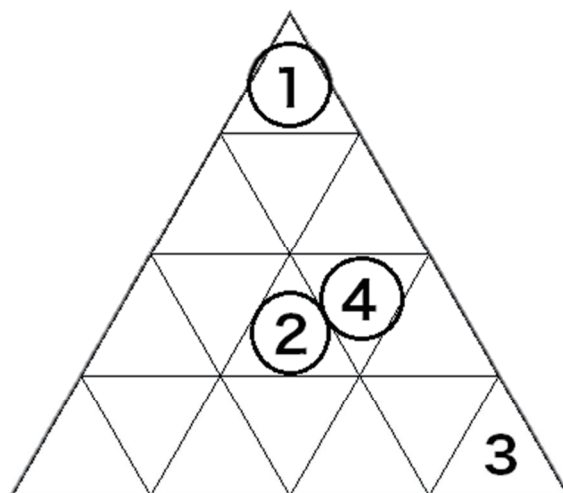
という条件において必ず解が一つになることがわかった。



○1辺4の三角形数独

初期条件として、右図のように

- ・ 数字が4つある
 - ・ 一番上にあたるマス(右図の“1”)とそれ以外の2つの頂点のどちらか一方に数字が入っている
 - ・ 真ん中の逆三角形の中心もしくはそのひとつ下(右図で逆三角形内の“2”もしくはその下)とその左右どちらかのマス(右図で逆三角形内の“4”もしくは“2”の左側)にそれぞれ数字が入っている
 - ・ 右図において丸で囲まれた3つの数字が全て違う
- という条件において必ず解が一つになることがわかった。



考察

研究した数独の種類が少ないため、法則性などは導くことができていないが、三角形と四角形ともに1～4の数字しか使えないものは初期条件の数字の数の最小が4であった。よって、何らかの関係性があるのではないかと考えられる。

結論・展望

今後はこれ以外の図形、例えば五角形や六角形に拡張し、研究を進めていきたいと考えている。それについて、五角形の平面充填を利用したらどうか、というふうに考えている。

また、立方体にも拡張していければと考えている。

参考文献

<https://www.nature.com/news/mathematician-claims-breakthrough-in-sudoku-puzzle-1.9751>

<https://excel-ubara.com/excelvba5/EXCELVBA230.html>

研究の経過・反省・感想等

この数独の研究を1年と少し行って自分は他の高校では得られない経験をたくさんして、とても成長することができたと思います。

自分の研究したいことをとことんできる課題研究は自分で解法を模索し、考える楽しさを教えてくれました。また、国内及び海外での研究発表を通じてコミュニケーション能力の重要性や人に伝えようという気持ちの大切さなども学ぶことができました。

どのようにすれば自分達が見つけたものを上手く証明できるか、どのような工夫をすれば初めて見る人にも分かりやすく伝わるか、などを考えることは難しくもありましたがとても楽しく行うことができました。

課題研究をしている途中、このテーマで果たしてよかったのだろうか、もっと良い研究テーマがあったんじゃないかななども思ったことがありましたが研究発表で話を聞いてくれる方が理解を下さるのを見ると自信をもつことができました。

この経験をこれから生きていく様々なことに活かしてこれからも頑張りたいと思います。

徳永 竜之介

予備研究から継続して数学の研究を行い、一年間を通して数独の研究をしてみて、とても貴重な経験ばかりだったと思います。

数字を使ったパズルの中で最も有名であろう数独はすでに研究されていることも多く、テーマを決めるまでにとっても苦労しました。その中で私が考えていたことは「誰もがルールを理解して楽しめる新しい数独を作る」ということでした。

研究が進んだ後、ポスターを作ってみてわかったことは「伝えることの難しさ」でした。いかに図を使ってわかりやすく視覚的に伝えるか、文字ばかりのポスターではなく見やすいものを作れるのか、など難しいことはたくさんありました。

しかし、何回も発表するにつれて「どのように発表すれば聞いてくれた人に伝わるのか」「どのような質問を聞いてくれた人は考えるのか」がわかるようになり、自分たちの発表をより良くしていくことができました。台湾で発表したときにとってもたくさんの人が聞いてもらい、現地の言葉で数独のことを伝えられたときや数独の研究だとすぐに分かってくれたときはとても嬉しかったです。

この研究を通して、数独の面白さを改めて感じたのはもちろん、人に伝えることの難しさや難しいからこそその伝わったときの嬉しさ、自分が研究してきたことについて自信を持って伝えることなど、たくさんのことを学びました。この一年間の経験はとても貴重なものだったと思います。ご指導いただいた先生方への感謝の気持ちを忘れず、この経験を今後にも生かしていきたいです。

清水 駿介