千葉県立船橋高等学校
理数科課題研究 2019 年

ある式を満たす場合の数を求める式

A Formula Which Shows the Number of Patterns of Numbers Fulfilling Some Expressions

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
原田　耕多　　市川　雅之

テーマ設定の経緯

この研究は、確率を面積で捉える考え方を利用して、ある数式を満たす確率を求めることを試みることから始まった。そこで、ある数式を満たす要素を座標平面上に表すことによってその数式を満たす場合の数を求めるアイデアを思いつき、この研究テーマに至った。

概要

条件１：a,b は変数かつ自然数で、n は定数かつ自然数。

この条件における a,b について $a+b=n$ を満たす場合の数を式で表す。

条件２：c は変数かつ自然数で、m は定数かつ自然数。

条件１と条件２のもとで　$a+b+c=m$ を満たす場合の数を式で表す。

$a+b+c+d=l$

$a+b+c+d+e=k$ などと拡張する。

また、$a+b \leqq m$ などの不等式を満たす場合の数を式で表す。

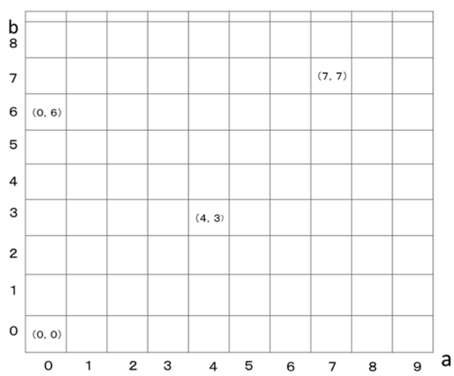
$a+b+c=m$,$a+b+c+d=l$　,$a+b+c+d+e=k$　においては、それぞれ（a+b 軸 c 軸 ）（a+b+c 軸 d 軸）（ a+b+c+d 軸 e 軸）とする平面を用いる。

方法

$a+b=n$ を考える。

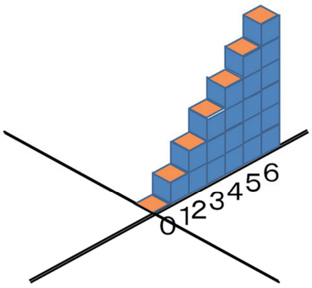
まず図１のような平面で(a,b)を表す。横軸が a,縦軸が b とする。

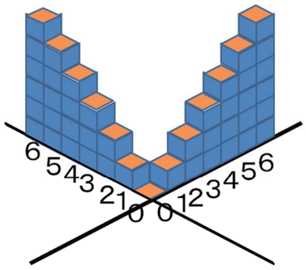
図１



次に、図１を底面とし、そのマスの(a,b)の値による a+b(=n)を高さとする図を考える。

図２　　図３　　図４





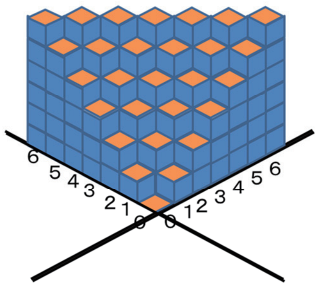


図２は、b=0 で b の値を固定し、a の値のみを変化させた図である。
図３は、図２に加えて、b の値も変化させたものである。
図２と図３をもとに a,b の値を変化させると、図４のようになることが分かる。

図５

A				
B	A			
C	B	A		
D	C	B	A	
E	D	C	B	A

図５は、図４を真上から見たものであり、それぞれの n について、a+b=n を満たす（a,b）は図５で文字分けされたように並ぶように表せる。

a+b=n について左図のように表せて、これらのことから(a,b)を考えると
a+b=n を満たす（a,b）の場合の数は n+1 個あることがわかる。

a+b+c=m を考える。

図６

1A					
1B	2A				
1C	2B	3A			
1D	2C	3B	4A		
1E	2D	3C	4B	5A	
1F	2E	3D	4C	5B	6A

以下、図６説明で用いる記号説明。

図６におけるそれぞれのマスを{a+b(=n),c}と表す。例えば、{a+b(=3),2}のマスは、a+b(=n)の軸に関して０から正の方向に４つ、c の軸に関して、０から正の方向に３つの所のマス（＝数字

の４が書いてあるマス）となる。また、それぞれの縦の列を(n)と表す。例えば、（２）は、a+b(=２)を満たす列（＝数字の３が書いてあるすべてのマス）となる。
以上。
以下、図６についてのより詳しい説明。
　図６は、図１における a の軸と b 軸をそれぞれ a+b(=n)の軸と c の軸とみなした平面である。
a+b(=n)の軸に関して、a+b(=n)を満たす場合の数は、上の結果より、n+1 となる。例えば、a+b=0 を満たす（a,b）の場合の数は、０＋１＝１、a+b=5 の場合だと、５＋１＝６となる。
すなわち、c は、それぞれの c の値に対して１つのパターンを持ち、a+b(=n)はそれぞれの n の値に対して n+1 のパターンを持つ。つまり、それぞれの(n)において、(n)上のマス{a+b(=n),c}は、n+1 個のパターンを持っている。例えば、（３）上のマスはそれぞれで３＋１＝４個のパターンを持ち、より詳しく言えば（３）上のマスのうち１つである{a+b(=3),5}は３＋１＝４個のパターンをもつ。よって、それぞれのマスが持つパターン数をそのマス上に記すと、図６のように表せる。ここで、図５の平面が表すことを図６にも適用する。
　ここで、a+b+c=m を満たす(a,b,c)の場合の数は、

$$\sum_{n=0}^{m}(n+1)$$

と表せる。

また、a=p を満たす場合の数は、

$$1$$

a+b=n を満たす場合の数は、n+1 だが、これは、下のようにも表せる。

$$\sum_{o}^{n}1$$

a+b+c=m での考え方を利用して、変数を増やした式に関しても式で表す。
例えば、a+b+c+d=l の場合だと、a+b+c(=m)の軸と d の軸とした平面を用いることによって、a+b+c(=m)と同様に考えて、a+b+c+d=l を満たす場合の数は、

$$\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{m}\sum_{o}^{n}1$$

と表せる。a+b+c+d+e=k についても同様に

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{m}\sum_{o}^{n}1$$

と表せる。(a)

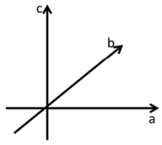
＜不等式＞

・a+b≦mを考える。

a+b=mはm+1通り、a+b=m-1はm通り、a+b=m-2はm-1通り・・・
a+b=2は3通り、a+b=1は2通り、a+b=0は1通りとなり、
a+b≦mを満たす場合の数は、

(m+1)+(m)+(m-1)+・・・+(3)+(2)+(1)= $\sum_{n=0}^{m}(n+1)$

図7



これは、a+b+c=mを満たす場合の数に等しい。

a

図１の平面(a軸とb軸のもの)を底面とした図7のようなabc空間を用いても示せる。・・・①

a+b≦mを満たす場合の数は$\sum_{n=0}^{m}(n+1)$（a+b+c=mを満たす場合の数）

また、①の考え方における図１の平面（①での空間における底面）の軸を a+b軸とc軸 としたものや a+b+c軸とd軸 とした空間を考えると、

a+b+・・・≦s（n個の変数）を満たす場合の数は、
a+b+・・・＝s（n＋１個の変数）を満たす場合の数に等しい。

すなわち、例えば、a+b+c+d≦5 を満たす場合の数を求めたいときには、
a+b+c+d+e=5 を満たす場合の数を求めることに等しいので、(a)の式を用いて、
その不等式を満たす場合の数を求めることができる。

参考文献

平成２３年検定教科書　２東書　数Ａ３０１

研究の経過・反省・感想

　まず、８月の２５日頃にテーマがやっと決まったほどテーマ設定をするのに非常に苦労した。漠然とした「やりたいこと」のようなものはあったが、実現不可能なものが多く、いずれも頓挫してしまった。テーマ設定には、意志と可能どちらもが必要で、逆にその２つさえあれば、課題研究としては成り立つと思う。
アイデアを思いついたときや、新しい発見ができた時は、とても気持ちがよかった。

４月　研究班を数学に決める。エネルギー変換効率の研究や葉緑体についての研究、匂いを作ることの研究など様々な計画があったが、統計について研究がしたくて数学へ。
５月６月７月　テーマを具体化する過程で詰まる。「テーマを具体化するも、そこで研究が難しすぎたり、当たり前すぎたりしたため、振出しに戻る」ということを繰り返すだけで進捗なし。
８月　テーマを急いで決める。
９月　なんとか千葉大発表会に間に合わせるも、発表内容はボロボロ。
１０月１１月１２月　台湾研修などを経験。研究内容が発展していく。
１月２月３月　千葉工業大学に向けて準備。発表慣れ。