

ブレスレットモデルを用いたルカ数列の拡張

Extensions of the Lucas numbers related to bracelet models

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

佐藤 ふたば

要約

SEG という塾で高 1 になる前の春休みに、青木亮二先生の『フェルマーの小定理へと繋がるフィボナッチ』という講座を受講した。その講座で 1 重ブレスレットモデルについて知り、 m 重への拡張に興味を持ったので研究をすることにした。その結果、 n と m のうち片方を定数とした場合に、いくつかの漸化式を得ることができた。また、ルカ数列の性質の拡張をすることができた。

前提

(ルカ数列)

ルカ数列 L_n は、フランスの数学者である Edouard Lucas (1842-91) にちなんで名付けられた数列である。

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \ (n \geq 3)$$

$$L_1 = 1, L_2 = 3, L_3 = 4, L_4 = 7, L_5 = 11, L_6 = 18, L_7 = 29, L_8 = 47, \dots$$

また、 p が素数のとき $L_p \equiv 1 \pmod{p}$ という性質を満たす。この性質は 1 重ブレスレットモデルを用いて証明されている。

(1 重のブレスレットモデル)

ルカ数列の第 n 項 L_n は、 $n \geq 2$ で「黒ビーズと白ビーズを合わせて n 個用いたホック入りの 1 重ブレスレットで、黒ビーズが隣り合わないような場合の数」と等しくなることが知られている。

この場合、黒ビーズはホックを挟んでも隣り合ってはいけない。また、裏返して一致するブレスレットも別物として数える。全て白ビーズのブレスレットがあってもよいものとする（参考文献 [1] と [2] から）。*1

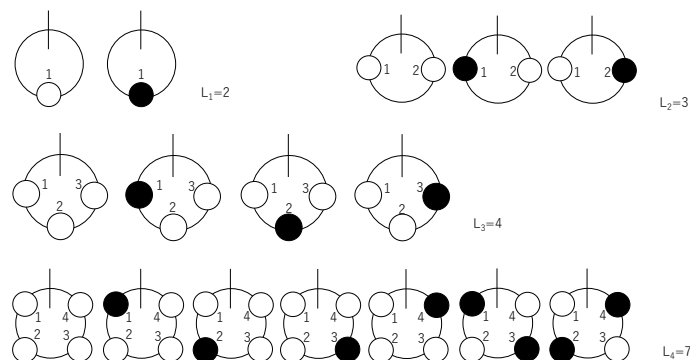


図 1: 1 重ブレスレットの例

*1 参考文献 [1] において、「黒ビーズと白ビーズを用いたホック入りの 1 重ネックレス」と「1 連ビーズ（通常のビーズ）と 2 連ビーズを用いたブレスレット」が紹介されている。前者のネックレスモデルは、部分の名称が違っただけで、今回用いたブレスレットモデルと全く同じものである。また、参考文献 [2] においては、“a bracelet of length n using beads of length one or two, where bracelets that differ by a rotation or a reflection are still considered distinct” が紹介されている。

ネックレスモデルと私のブレスレットモデルでは、 $n = 1$ のときにルカ数列の漸化式を満たさなくなってしまう。一方、2 連ビーズを用いたブレスレットモデルでは $n = 1$ のときにもルカ数列の漸化式を満たす。どのモデルを使っても、得られる漸化式や $n \geq 2$ での性質はルカ数と同じである。

今回、最初はネックレスモデルを用いて研究を始めたものの、参考文献 [2] に合わせて、名称をネックレスではなくブレスレットとしている。また、初項が漸化式を満たさないという欠点はあるものの、2 連ビーズを用いたモデルでは本研究における拡張をできないことから、参考文献 [1] のネックレスモデルをブレスレットモデルに改称して用いた。

n 列 m 重のブレスレット

本研究では、黒ビーズと白ビーズからなるホック入りの n 連 m 重ブレスレットについて考察する．図 2 において右側の図は左側の図のホックを開いておいた状態を表す．ホックを開いた状態で、ホックに平行な向きに並んでいるビーズを「連」と定義し、ホックを開いたとき、ホックの左側から 1 連目、2 連目、... と数えることにする．また、ホックを閉じたときに同心円状に並び、ホックを開いたときにホックと垂直な向きに並んでいるビーズを「重」と定義し、ホックを閉じたときに内側から 1 重目、2 重目、... と数えることにする．

n 連 m 重ブレスレットモデルにおいても、黒ビーズは互いに隣り合ってはいけないうものとする．同じ連・同じ重の中だけでなく、ホックを挟んでも黒ビーズは隣り合ってはいけないう．例えば、下図において 4 連目の 3 重目にあるビーズが黒であることから、4 連目の 2 重目のビーズは白でなければいけないう．

裏返して一致するものも別物と数えることにする．全て白ビーズのブレスレットがあってもよいものとする．

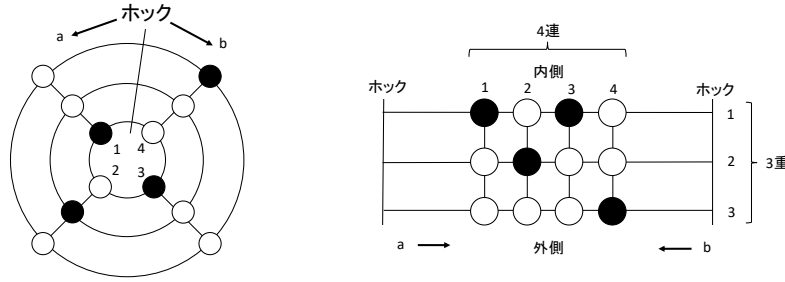


図 2: 4 連 3 重ブレスレットの一例

n 連 m 重ブレスレットの作り方の数を、 $l_n^{(m)}$ と表すことにする． n または m のうち片方が定数のときの、 $l_n^{(m)}$ の漸化式について考察する．

m を定数とした場合に得られる漸化式とその性質

n 連 2 重、 n 連 3 重のブレスレットについての漸化式を求めることができた．最初は n 連 2 重の漸化式を連立漸化式を解いて導出していたが、 n 連 3 重の漸化式は連立漸化式が複雑になってしまい、行列を使わないと求めることができなかった．

- n 連 2 重のとき、
(連立漸化式から求めた漸化式)

$$l_1^{(2)} = 3, l_2^{(2)} = 7, l_3^{(2)} = 13, l_n^{(2)} = 2l_{n-1}^{(2)} + l_{n-2}^{(2)} + 2(-1)^n \quad (n \geq 4)$$

(行列から求めた漸化式)

$$l_1^{(2)} = 3, l_2^{(2)} = 7, l_3^{(2)} = 13, l_4^{(2)} = 35, l_n^{(2)} = l_{n-1}^{(2)} + 3l_{n-2}^{(2)} + l_{n-3}^{(2)} \quad (n \geq 5)$$

- n 連 3 重のとき、

$$l_1^{(3)} = 5, l_2^{(3)} = 17, l_3^{(3)} = 43, l_4^{(3)} = 181, l_5^{(3)} = 621, l_6^{(3)} = 2309,$$

$$l_n^{(3)} = l_{n-1}^{(3)} + 8l_{n-2}^{(3)} + 6l_{n-3}^{(3)} - l_{n-4}^{(3)} - l_{n-5}^{(3)} \quad (n \geq 7)$$

- 任意の素数 p と任意の自然数 m について、 $l_p^{(m)} \equiv 1 \pmod{p}$ が成り立つ．

$l_n^{(2)}$ の漸化式 (行列を用いた証明)

n 連 2 重のブレスレットの数 $l_n^{(2)}$ は以下の漸化式を満たす．

$$l_1^{(2)} = 3, l_2^{(2)} = 7, l_3^{(2)} = 13, l_4^{(2)} = 35, l_n^{(2)} = l_{n-1}^{(2)} + 3l_{n-2}^{(2)} + l_{n-3}^{(2)} \quad (n \geq 5)$$

(証明)

$n-1$ 連 2 重のブレスレットに n 連目を加えて得られる漸化式を考える．ここで、1 重目も 2 重目も白ビーズのものを B_0 、1 重目が黒ビーズで 2 重目が白ビーズのものを B_{11} 、1 重目が白ビーズで 2 重目が黒ビーズのものを B_{12} とおく．

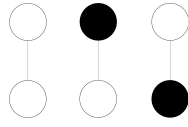


図 3: 左から B_0 , B_{11} , B_{12}

$n = 1$ のとき, $l_1^{(2)} = 3$ である. 以下, $n \geq 2$ の場合について考える.

下の表は, 2 連 2 重ブレスレットで, 1 連目と 2 連目の組み合わせに応じて黒いビーズが隣り合わないブレスレットが何通りあるかを表している.

	B_0	B_{11}	B_{12}
B_0	1	1	1
B_{11}	1	0	1
B_{12}	1	1	0

表 1: 行で 1 連目, 列で 2 連目を表す

表より,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 最初に, Q^{n-1} の各成分 a_{ij} が, 1 連目と n 連目が以下の組み合わせであるようなブレスレットの数を表すということを数学的帰納法で示す.

	B_0	B_{11}	B_{12}
B_0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
B_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
B_{12}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

表 2: 行で 1 連目, 列で n 連目を表す.

(i) Q^1 について, Q を上の表 2 から定めたことから, Q^1 の a_{ij} 成分は表 3 を満たす. Q^2 は,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる. Q の i 行ベクトルの成分が表す 2 連 2 重ブレスレットの 2 連目と, j 列ベクトルの成分が表すブレスレットの 1 連目が一致している ($1 \leq k \leq 3$). B_x, B_y, B_z は B_0, B_{11}, B_{12} のいずれかを表すとする. Q の i 行ベクトル ($1 \leq i \leq 3$) と j 列ベクトル ($1 \leq j \leq 3$) の内積を取ることは, B_x, B_z が決まっているとき, 1 連目が B_x , 2 連目が B_y のブレスレットの数と 1 連目が B_y , 2 連目が B_z となるブレスレットの数をかけ, すべての B_y についての総和をとることであり, この総和が Q^2 の a_{ij} になる. このとき, 表において B_x と B_y, B_y と B_z で黒ビーズが隣り合わないものを 1, 隣り合うものを 0 としたことから, 1 連目と 2 連目でも, 2 連目と 3 連目でも黒ビーズが隣り合わないようなものの数は総和に含まれ, 1 連目と 2 連目または 2 連目と 3 連目で黒ビーズが隣り合うものは 0 になる. したがって, Q^2 の成分が表す場合の数は以下ようになる.

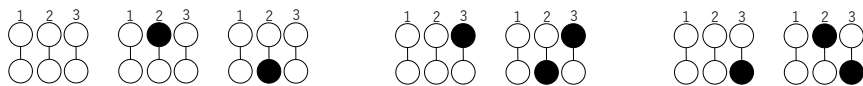


図 4: 左から $B_0 \cdots B_0$ ($a_{11} = 3$), $B_0 \cdots B_{11}$ ($a_{12} = 2$), $B_0 \cdots B_{12}$ ($a_{13} = 2$)

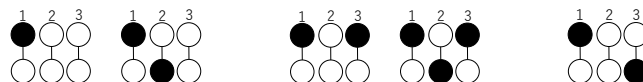


図 5: 左から $B_{11} \cdots B_0$ ($a_{21} = 2$), $B_{11} \cdots B_{11}$ ($a_{22} = 2$), $B_{11} \cdots B_{12}$ ($a_{23} = 1$)

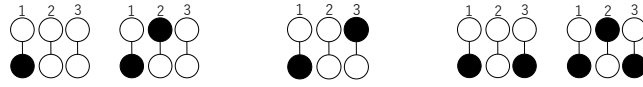


図 6: 左から $B_{12} \cdots B_0$ ($a_{31} = 2$), $B_{12} \cdots B_{11}$ ($a_{32} = 1$), $B_{12} \cdots B_{12}$ ($a_{33} = 2$)

よって, Q に Q を掛けることは, 黒ビーズが隣り合わないように 2 連 2 重プレスレットに 3 連目を付け加えることを表す.

(ii) $n \leq k$ で Q^{n-1} の a_{ij} 成分は表 3 を満たすと仮定する.

Q^{k-1} の i 行ベクトル ($1 \leq i \leq 3$) と Q の j 列ベクトル ($1 \leq j \leq 3$) の内積を取ることは, B_x, B_z が決まっているとき, 1 連目が B_x , $n-1$ 連目が B_y のプレスレットの数と 1 連目が B_y , 2 連目が B_z となるプレスレットの数をかけ, すべての B_y についての総和を取ることであり, この総和が Q^k の a_{ij} 成分である. このとき, 表 2 において B_y と B_z で黒ビーズが隣り合わないものを 1, 隣り合うものを 0 としたことから, $k-1$ 連目を B_y , k 連目を B_z としたときに, $k-1$ 連目と k 連目でも黒ビーズが隣り合わないようなものの数は総和に含まれ, 黒ビーズが隣り合うものは 0 になる. よって, Q^{k-2} に Q を掛けることは, 黒ビーズが隣り合わないように $k-1$ 連 2 重プレスレットに k 連目を付け加えることを表す. したがって, Q^{k-1} の各成分 a_{ij} は以下の表の場合の数を表す.

	B_0	B_{11}	B_{12}
B_0	a_{11}	a_{12}	a_{13}
B_{11}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
B_{12}	a_{31}	a_{32}	a_{33}

表 3: 行で 1 連目, 列で k 連目を表す

すなわち, Q^{k-1} の各成分 a_{ij} は表 3 を満たしている. したがって, 数学的帰納法より, Q^{n-1} の各成分 a_{ij} は表 3 の場合の数を表している.

Q^{n-1} の成分のうち, 1 連目と n 連目で黒ビーズが隣り合わないものは $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ であるので,

$$\begin{aligned}
 l_n^{(2)} &= (a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33}) - a_{22} - a_{33} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と表せる.

Q の固有多項式を $h(x)$ とおくと,

$$h(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$$

したがって, ケーリー・ハミルトンの定理から, E を単位行列, O を零行列とすると,

$$h(Q) = Q^3 - Q^2 - 3Q - E = O$$

よって, $Q^{n-1} - Q^{n-2} - 3Q^{n-3} - Q^{n-4} = O$ が成り立つ. すなわち, $\vec{u}$ を 3 行ベクトル, $\vec{v}$ を 3 列ベクトルとすると,

$$\vec{u}Q^3\vec{v} - \vec{u}Q^2\vec{v} - 3\vec{u}Q\vec{v} - \vec{u}E\vec{v} = 0$$

がなりたつ. これと

$$l_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から, $l_n^{(2)} - l_{n-1}^{(2)} - 3l_{n-2}^{(2)} - l_{n-3}^{(2)} = 0$ すなわち

$$l_n^{(2)} = l_{n-1}^{(2)} + 3l_{n-2}^{(2)} + l_{n-3}^{(2)}$$

$l_1^{(2)}$ は B_0, B_{11}, B_{12} の 3 つがあり, $l_1^{(2)} = 3$ となるため, 漸化式は $n \geq 5$ でないと成り立たない. いくつか小さい n について Q^{n-1} から値を求めると,

$$l_2^{(2)} = 7, l_3^{(2)} = 13, l_4^{(2)} = 35$$

$n = 5$ のとき, 漸化式から値を求めると,

$$l_5^{(2)} = l_4^{(2)} + 3l_3^{(2)} + l_2^{(2)} = 35 + 13 \times 3 + 7 = 81$$

となり, Mathematica での計算と一致する.

Q は対称行列であるので, ある正則行列 P が存在し, 対角化することができる.

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

とおくと, $a_1 = 1 + \sqrt{2}$, $a_2 = 1 - \sqrt{2}$, $a_3 = -1$ は $h(x) = 0$ の解であるから, Q は

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

を満たす. したがって,

$$\begin{aligned} l_n^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n + (-1)^n \end{aligned}$$

これが一般解で, $n \geq 2$ で成立する.

n を定数とした場合に得られる漸化式とその性質

n を定数とした場合に, m についての漸化式を立てると次のようになった. 連立漸化式と行列の 2 通りで解いた. また, 得た漸化式を用いて $l_p^{(m)} \equiv 1 \pmod{p}$ が $p = 3, 5$ のときに成り立つことを示すことができた.

- 2 連 m 重のとき,
(連立漸化式から求めた漸化式)

$$l_2^{(1)} = 3, l_2^{(2)} = 7, l_2^{(m)} = 2l_2^{(m-1)} + l_2^{(m-2)} \quad (m \geq 3)$$

(行列から求めた漸化式)

$$l_2^{(1)} = 3, l_2^{(2)} = 7, l_2^{(3)} = 17, l_2^{(m)} = l_2^{(m-1)} + 3l_2^{(m-2)} + l_2^{(m-3)} \quad (m \geq 4)$$

- 3 連 m 重のとき,
(連立漸化式から求めた漸化式)

$$l_3^{(1)} = 4, l_3^{(2)} = 13, l_3^{(m)} = 3l_3^{(m-1)} + l_3^{(m-2)} \quad (m \geq 3)$$

(行列から求めた漸化式)

$$l_3^{(1)} = 4, l_3^{(2)} = 13, l_3^{(3)} = 43, l_3^{(4)} = 142, l_3^{(m)} = l_3^{(m-1)} + 6l_3^{(m-2)} + 5l_3^{(m-3)} + l_3^{(m-4)} \quad (m \geq 5)$$

- 4 連 m 重のとき,
(連立漸化式から求めた漸化式)

$$l_4^{(1)} = 7, l_4^{(2)} = 35, l_4^{(3)} = 181, l_4^{(m)} = 5l_4^{(m-1)} + l_4^{(m-2)} - l_4^{(m-3)} \quad (m \geq 4)$$

(行列から求めた漸化式)

$$l_4^{(1)} = 7, l_4^{(2)} = 35, l_4^{(3)} = 181, l_4^{(4)} = 933, l_4^{(5)} = 4811, l_4^{(6)} = 24807, l_4^{(7)} = 127913, \\ l_4^{(m)} = l_4^{(m-1)} + 17l_4^{(m-2)} + 23l_4^{(m-3)} + l_4^{(m-4)} - 9l_4^{(m-5)} - 5l_4^{(m-6)} + l_4^{(m-7)} \quad (m \geq 8)$$

- 5 連 m 重のとき,

(連立漸化式から求めた漸化式)

$$l_5^{(1)} = 11, l_5^{(2)} = 81, l_5^{(3)} = 621, l_5^{(4)} = 4741, l_5^{(5)} = 36211, \\ l_5^{(m)} = 8l_5^{(m-1)} - 3l_5^{(m-2)} + 2 \sum_{k=3}^{m-3} (-1)^{k-1} l_5^{(m-k)} + 16(-1)^m \quad (m \geq 6)$$

(行列から求めた漸化式)

$$l_5^{(1)} = 11, l_5^{(2)} = 81, l_5^{(3)} = 621, l_5^{(4)} = 4741, l_5^{(5)} = 36211, l_5^{(6)} = 276561, \\ l_5^{(7)} = 2112241, l_5^{(8)} = 16132281, l_5^{(9)} = 123210611, l_5^{(10)} = 941023441, l_5^{(11)} = 7187084861, \\ l_5^{(m)} = l_5^{(m-1)} + 40l_5^{(m-2)} + 90l_5^{(m-3)} - 40l_5^{(m-4)} - 184l_5^{(m-5)} + 14l_5^{(m-6)} + 130l_5^{(m-7)} \\ - 20l_5^{(m-8)} - 30l_5^{(m-9)} + 11l_5^{(m-10)} - l_5^{(m-11)} \quad (m \geq 12)$$

今後の展望

- プレスレットモデルを一般に n 連 m 重に拡張するとどのような漸化式が得られるか. それらはどのような性質をもつか.
- 黒ビーズが隣り合ってはいけないというルールから, このプレスレットモデルは斥力を持つ粒子を含んだ結晶構造を考える際に応用できると考えられる (例: 半導体に不純物を入れるときなど). プレスレットモデルでビーズの種類を増やしたり, 3 次元に拡張したりするとどうなるか.

謝辞

SEG 青木亮二先生から先行研究である 1 重ネックレスモデルについて教えていただいた. 千葉大学大学院理学研究科 萩原学准教授に言葉足らずな部分にご助言いただいた. 千葉大学大学院理学研究科 渚勝教授, 筑波大学理工学群数学類数理物質科学研究科数学専攻 照井章教授, 筑波大学大学院数理物質科学研究科数学専攻 村尾智さんに Mathematica の使い方を教えていただいた. お礼申し上げる.

最後に, 千葉県立船橋高等学校で課題研究を担当してくださり, 今年度からは聖徳大学で教鞭をとりながらも, いまも指導を続けてくださる友松幹雄先生に心から感謝の意を表したい.

参考文献

- [1] 『フェルマーの小定理へと繋がるフィボナッチ Ver. 2016』 (青木亮二, SEG, 2016)
- [2] P. G. Anderson, A. T. Benjamin, and J. A. Rouse: Combinatorial Proofs of Fermat's, Lucas's, and Wilson's Theorems, Amer. Math. Monthly 112(2005), no. 3, 266-268.
- [3] 『はじめての数論 発見と証明の大航海—ピタゴラスの定理から楕円曲線まで』 (ジョセフ・F・シルヴァーマン著, 鈴木治郎訳, 丸善出版, 2014)
- [4] 『[改訂版] フィボナッチ数の小宇宙/フィボナッチ数, リュカ数, 黄金分割』 (中村滋, 日本評論社, 2002)
- [5] THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES (<https://oeis.org/A000031>) 2018 年 2 月 18 日 確認
- [6] Arthur T. Benjamin and Jennifer J. Quinn: Recounting Fibonacci and Lucas Identities, The College Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5 (Nov., 1999), 359-366