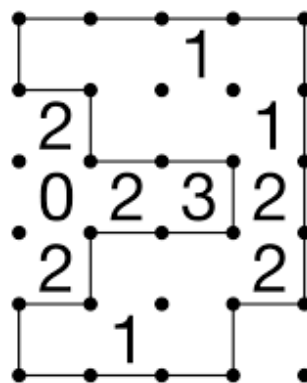
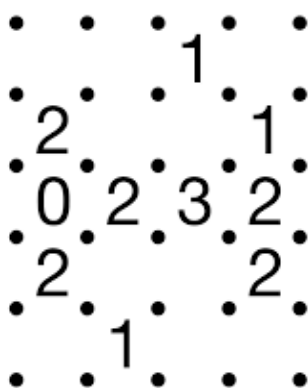


The Slitherlink's Laws when its Lattice Dots Increase

大平 光彦

パズルの概要は、等間隔に配置された格子点の間に記された数字(図 1 = 左下)を頼りに、格子点の間を縦または横の直線で結び、 1 つの閉じた輪 (単一閉曲線) を書き上げる(図 2 = 右下)、というものです。



また、この三つから問題として成立する形を作るための格子点の下限値は 2×3 です。

スリザーリンクの効率的な解法はネット上に数多く掲載されていますが、あくまでも「解く」方面の追究であり、「作る」方面の追究はほとんど行われていません。そこで、私はこのパズルを研究し、最終的には実際の問題が作れる所まで追究しようと思っています。

考察①

図3のように、 $2 \times n$ 個の格子点（一边の格子点が2段、もう一边の格子点が n 列）で作れる形の数は

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

図3



で表されます。

証明

図3のように一边の格子点の個数を2、もう一边の格子点を左から右に1列目、2列目、と順に n 列並べ、長方形の左端の線を1列目に固定した時、作れる長方形の数は $n-2$ です。同様に2列目に固定すると、長方形の数は $n-3$ です。まとめると、作れる長方形の数は初項 $n-2$ 、公差 -1 、項数 $n-2$ の等差数列で表されます。

すると、作れる形の数はこの数列の初項から末項までの総和なので、

$$\frac{1}{2}(n-1)\{2(n-2)-(n-2)\} = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

で表されます。

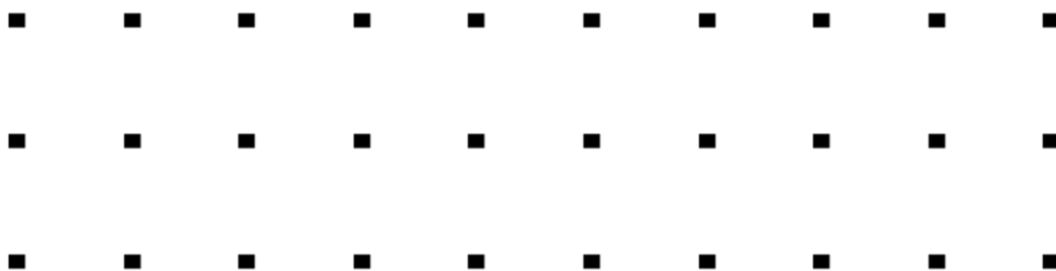
考察②

図4のように、 $3 \times n$ 個の格子点（一边の格子点が3段、もう一边の格子点が n 列）で作れる形の数 a_n は

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2^n - 1 + b_n \quad (n \geq 3).$$

の形で表されます。

図4



実際、例えば図5の 3×4 個の格子点の場合、図6の 3×3 個の部分で作れる形の数 a_3 、重なった 3×2 の部分で作れる形の数 a_2 なので、 $2a_3 - a_2$ 個の問題が考えられます。

図5

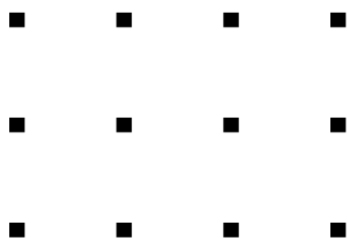
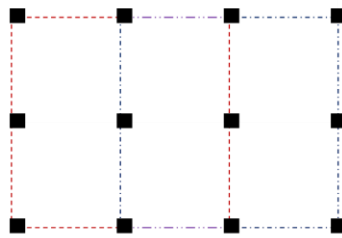


図6



次に、図7, 8のように片方の列の一部が凹んだ形について考えます。まず1つも凹まないものが $3C0$ 個、3ヶ所の内1ヶ所凹むのが $3C1$ 個、同様に2ヶ所では $3C2$ 個、すべて凹むときは $3C3$ 個あります。そして、それぞれに上下逆のパターンが存在します。ただし1つも凹まないものは上下逆でも形が変わらないため1つは無視します。これらをまとめると、

$$2 \left(3C0 + 3C1 + 3C2 + 3C3 \right) - 1$$

$$= 2 \times 2^3 - 1 = 2^4 - 1.$$

個の問題が考えられます。

図7 ($3C1$ の例)

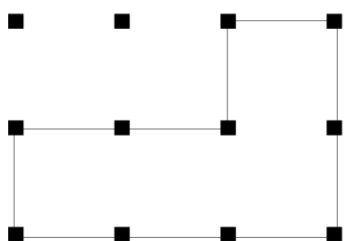


図8 ($3C2$ の例)

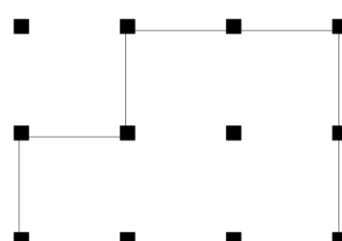
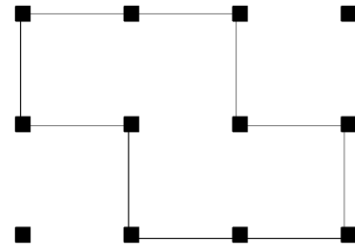


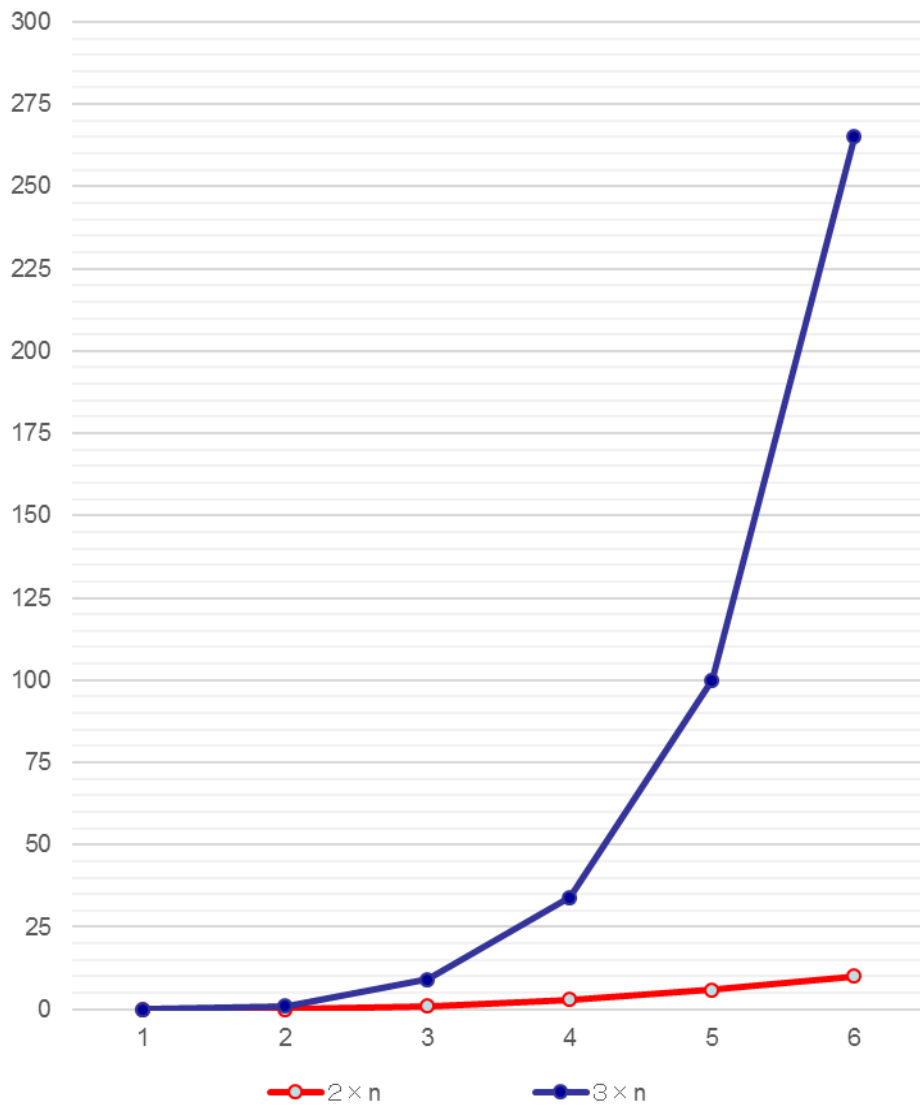
図 9

b_n は図 9 のように両方の段が一部凹む場合のパターン数です。しかし、 $n \geq 7$ では具体的な数値がまだ算出できていない上に、まだ一般化もできていません。



結論

下のグラフは形の数の推移を表しています。



このグラフから、 $2 \times n$ も $3 \times n$ も単調に増加し、特に $3 \times n$ では急激な増加が見られる、ということが分かります。

今後の展望

今後の展望としては、考察②の b_n で $n \geq 7$ での追究をして、一般化ができるかどうかを考えます。また、一边を4段以上にしたときについても研究していきます。

研究の経過・反省・感想等

昨年夏ぐらいからこの研究を始めたのですが、正直年間通してみると内容自体に進歩が見られないなあと思います。ポスターの文面を少しずつ変えていって、取り繕った感が滲み出ています。と、思ってしまう位この研究は難解で、進みが悪かったです。ただ、この研究をしていて良かったのは、好きなパズルについて研究できたことです。これは本当に良かったです。私はこの研究を完成させることは出来ませんでした。ですがいつか、誰かが引き継いで完成してくれればなあと思います。