

ペンローズの多角形の実現

Realization of Penrose's polygon

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

井嶋 天音

はじめに

私は、だまし絵である不可能図形の立体の一つ「ペンローズの三角形」を多角形にしたとき、実現できるかどうかを調べた。「ペンローズの三角形」とはスウェーデンの芸術家オスカー・ロイテルスバルトが考案し、それとは独立にロジャー・ペンローズが「不可能性のもっとも純粋な形」として考案し一般に広められた。オーストラリアのパースにあるモニュメントとしても知られており、3本の真っ直ぐな四角柱がそれぞれ直角に組み合わさりながら、とある方向から見ると三角形に見える、実際は辺がつながっていない不可能図形である。

前提として、明治大学の杉原厚吉先生によると「立体の頂点座標などを未知数で表す。定性的構造に基づいてその未知数が満たすべき方程式、不等式をたてる。特に立体を多面体に限定したとき、この方程式・不等式は線形となる。この方程式・不等式が解をもてば不可能図形の立体を作ることができ、そうでなければ作ることができない。ただし作ることができる場合には、一般に無限に多くの不可能図形の立体を作ることができるため立体の形も一つには決まらない」とある。つまり、立体の形は無数に存在する。これを前提に私はペンローズの多角形の作成、前述した方程式の成立、またペンローズの多角形以外の不可能立体の作成を試みた。

目的

ペンローズの多角形の作成、前述した方程式の成立、またペンローズの多角形以外の不可能立体の作成を試みる。

方法 1

まず私は、下の図 1、2 のように三角形を針金で作成してみた。



図 1



図 2

図1の三角形も図2の三角形も大きさは同じであり、一辺の長さもそれぞれの三角形ですべて等しい。

しかし図1は針金を 90° のコの字にし、一辺のみを 90° 上に持ち上げたもの、図2は全ての角を 60° の正三角形にして同じく一辺のみ 90° 上に持ち上げたものである。

このように、一角の大きさが異なっても不可能立体は成立する。これは三角形だけに限らず、四角形や五角形の多角形などでも同様である。

方法2

次に、下の図3、4は工作用紙を使い一辺が四角柱でできたもので三角形、四角形を作成したものである。

なお、遠近は考慮しないものとする。



図3

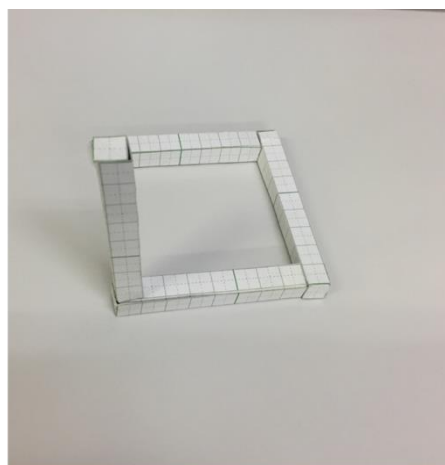


図4

作り方は図1、2と同じように、三角形も四角形も一辺の長さは同じで、一辺あたりの長さもそれぞれすべて等しく、一角 90° のコの字、四角形の輪の内、一辺のみを 90° 上に持ち上げたものである。

前述したとおり、立体の形は無数に存在する。

そこで私は視点を変え、別の図形を組み合わせでより不可能立体に見えるような工夫を試みた。

方法3

下の図5、6、7は平面図形と針金を交差させたものである。平面図形は一枚の画用紙で、針金の方が画用紙を螺旋状にくぐらせた、一つの頂点がつながっていない不可能立体である。

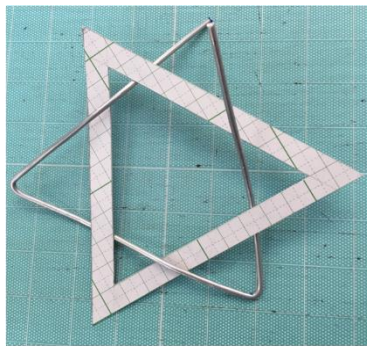


図5

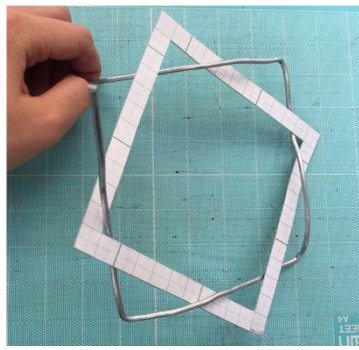


図6

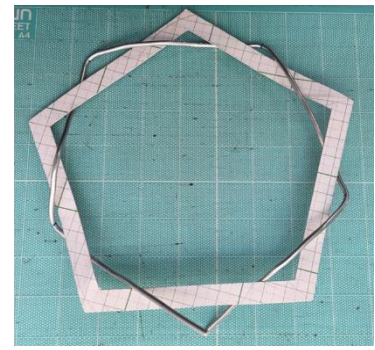


図7

針金の不可能立体は、一見直線に見えるが、実際は針金を折り曲げないと実現できないというものである。図5では上、図6では左上、図7では下の針金の頂点が繋がれているように見えるが、実際は繋がっておらず、離れている。三角形は上手く作成できたが、四角形、五角形と角が増えるほど針金の曲線が目立ってしまった。しかし、これは単純に作業が細かくなってしまったこともあるので、全体的に図形を大きくすれば解決すると思われる。

平面図形の一辺の長さと針金の一辺の長さは等しい。五角形になると一角が大きくなるために、どちらかが短くなっても長くなっても頂点同士が邪魔するため上手く作成できなかったのも、六角形以上の多角形は作成が困難であると思われる。

感想

今回、約1年に渡り不可能立体について研究してきたが、方程式を立てるまでに至らず、ここで研究が終わってしまうことが少し心残りだ。もしまた機会があれば、方程式を考えてみたり、また、今回は三角形、四角形に五角形のみで、平面図形と針金で同じ図形同士の組み合わせだったので、立体図形同士、違う多角形同士での組み合わせを実践したり、ペンローズ以外の不可能立体の作成も実践してみたいと思う。

数学は他の分野と研究方法が違ったり、一人で研究したりと心細さや不安もあったが、ここまでやり遂げられた。結果としては不完全な箇所も多く、自分でも素晴らしい研究とは言い難いが、貴重な経験ができたことに自信をもって、この経験を生かして将来に役立てられたらと思う。

この研究をするにあたって、担当の先生方や外部の講師の方々など、たくさんの方々にたくさんの助言をいただいたことに感謝。今までありがとうございました。

参考文献

- ・ ペンローズの三角形

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9A%E3%83%B3%E3%83%AD%E3%83%BC%E3%82%BA%E3%81%AE%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2>

- ・ 杉原厚吉 個人ホームページ

<http://home.mims.meiji.ac.jp/~sugihara/Welcomej.html>

- ・ 杉原厚吉 「数理で探る錯覚—仕組みがわかると視覚の偉大さも見えてくる—」

<http://mathsoc.jp/publication/tushin/2002/2002sugihara.pdf>

- ・ 杉原厚吉 「だまし絵と線形代数」 共立出版 2012