

平成 26 年度指定スーパーサイエンスハイスクール

平成 29 年度（2017 年度）

生徒研究報告集

千葉県立船橋高等学校

目次

理数科課題研究（SS課題研究Ⅱ）

No	分野	No	テーマ	氏名	ページ
1	物理	1	落下する紙が滑る条件	秋葉 海弥	2
2		2	ダイラタンシー現象と液体の界面張力の関係	水野 智晴 河崎 喜斗	6
3		3	紙飛行機のエレベーターの折り曲げによる飛行の変化	堂脇 大志 田中 瑞希	10
4		4	紙飛行機の主翼の迎え角を変えたときの揚力の変化	谷口 僚麻 李 瑛博	14
5		5	界面張力差と石鹼ボートの速度	中山 舞香	17
6	化学	1	なぜ飴は溶けてベタベタになってしまうのか	大木 あかり	24
7		2	金属イオンを最も吸着するアルギン酸ゲルの作製	大森 千夏	28
8		3	木炭の作成条件や金属イオン添加による導電性の向上方法	柿澤 昂志	32
9		4	EPDMの劣化と次亜塩素酸ナトリウム水溶液の温度・pHとの関係	小林 純也 荻米 洸亮	36
10		5	様々な化学物質の利用による酸化チタンの酸化能力の変化	丸山 衡平 岸田 実優	40
11		6	輪ゴムに接触する金属の違いによる劣化の変化	酒井 芳樹	44
12		7	クエン酸を用いて土壌から放射性物質を分離する方法	渡邊 有希人	48
13	生物	1	紫外線がジョロウグモの牽引糸に与える影響	大草 三起	52
14		2	光合成速度を簡易に測定するための光合成実験系の確立	小林 明日香	56
15		3	ミズキンバイ（絶滅危惧種Ⅱ）が生育しやすい環境と保全の考察	松原 瑞貴 小原 瑞稀	60
16		4	なぜワモンゴキブリは2種類の糞をするのか	山田 隼也 山本 莉央	64
17	地学	1	間隙水圧と円磨度の関係	篠崎 実紗 石井 咲妃	68
18		2	模擬火成岩作成実験における冷却時間と結晶の状態の関係	大久保 敦也 井上 大裕	72
19		3	寒天をモデルに用いた免震の研究	高橋 大樹 大久保 歩	77
20		4	大気が夕日の色に与える影響	大山 智弘 吉雄 忠行	82
21		5	固体表面を上昇する液体の運動	鍋田 悠人	86
22		6	星の瞬きの定量的観測	余 世良 吉田 拓暉	90
23	数学	1	$(a+bi)^n$ の規則性	井上 竜徳 唐橋 幸佑	94
24		2	指折り掛け算の拡張	齋藤 諒明	100
25		3	ハノイの塔の柱を x 本にして最小手順を求める	坂口 慶多	104
26		4	三次元数独の作成とその数学的性質	佐藤 翔太	109
27		5	循環小数における循環節の規則性	伊達 まどか	114
28		6	四次元ルービックキューブで解の最小手順を求めるアルゴリズム	長谷川 世波	118

普通科課題研究（課外活動）

29	化学	8	砂糖がゼリーの弾性に与える影響	二宮 朝日菜 前原 春佳	122
30		9	黄銅の腐食のメカニズム	長谷川 咲希	126
31	地学	7	月の表面の砂が月の明るさに及ぼす影響	高津 渚 金子 真帆 小林 遥香 栢山 朱里	130
32	数学	7	円筒型オセロにおける優位性と数学的性質	鈴木 さら	134

理数科課題研究は主に平成28年度SS課題研究Ⅱ（2年生2単位）において実施した。
 普通科課題研究は主に平成28年度普通科課題研究（2年生課外活動）において実施した。
 本報告の執筆と一部の継続研究は平成29年度に実施した。

落下する紙が滑る条件

What course a piece of paper to slide on the ground

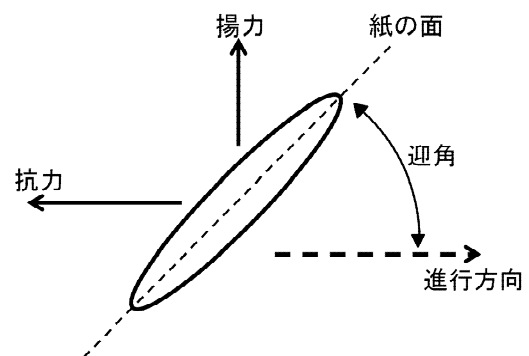
千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

秋葉 海弥

はじめに

トランプやわら半紙などの紙状の物は、地面に対して角度をつけて落とすと紙の倒れている方向へ進み着地すると地面を滑っていくことがある。紙が地面を滑る距離や速さは少し驚く大きさである。また、この紙が滑る現象が起こるのはランダムのように感じる。そこでこの現象を明らかにしたいと思い下記の研究を行った。

今回の研究は空気抵抗が大きくかかわっていると考え、空気抵抗の大まかな規則に則って研究を進めた。空気抵抗は多くの場合で揚力と抗力との二つの力で表される。紙（機体）が空気中を進んでいるとき、右図のように揚力は進行方向と平行な面に対して垂直方向にはたらく力で、抗力は進行方向に対して逆方向にはたらく力である。この二つの力の大きさは進行方向と紙の面との間の小さいほうの角（迎角と呼ぶ）に大きく左右される。迎角が 90° 前後のとき、揚力は非常に小さくなり抗力は大きくなる。



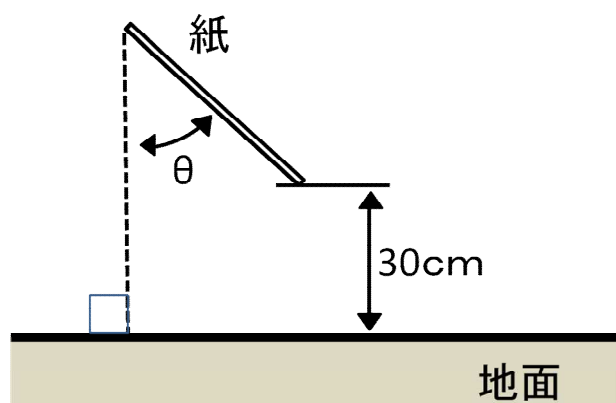
目的

トランプやわら半紙のような紙状の物は、適度な高さから適度な角度をつけて落とすと地面の上を滑る。この現象が起こる条件を調べることがこの研究の目的で、そのために一定の高さから角度をつけて工作用紙を落とす。紙を自由落下させるときの角度を変化させ、着地するときの迎角を調べ、その後紙が滑るかどうかを確認する。

方法

・実験概要

地面に対して角度をつけて、紙を滑らかな地面に向かって自由落下させる。高さは紙の下端から地面までを 30cm とする。角度 θ は紙の面と鉛直方向のなす角である。これを地面に対してつける紙の角度とする。紙が着地するところを動画にして迎角を求める。着地後に紙が 10 cm 以上移動したとき、紙は滑ったと判断する。各角度でそれぞれ一回ずつ計測した。



・実験方法

使用するものは、スタンド、L 字の金属棒（押しても反らない定規状のもので代用可能）、工作用紙（半径 7cm の円形）。スタンドで定規を固定して高さ、角度 θ を調節する。紙を定規の下から指で軽く押し当てる。このとき、当てる面積を大きくすると紙が棒に密着する力が発生するので注意する。今回は面積を 2 cm^2 とした。指を離すと紙が自由落下する。落下して紙が着地する様子を iPhone7 のカメラ・スローモードで撮影する。

・計測方法

動画から静止画を切り出す。切り出す静止画は着地する直前と直後の 2 枚とした。直後の静止画から紙の面の角度 α を求める。直前と直後の静止画を比較して移動方向 β を求める（図 1・2 を参照、 α も β も小さい方の角度とする）。迎角は、図 1 のとき $\alpha + \beta$ となり、図 2 のとき $\beta - \alpha$ となる（三角形の外角の定理からわかる）。ここで図 2 の α を負の値とすると迎角は $\alpha + \beta$ と表せる。これによって迎角が求められる。

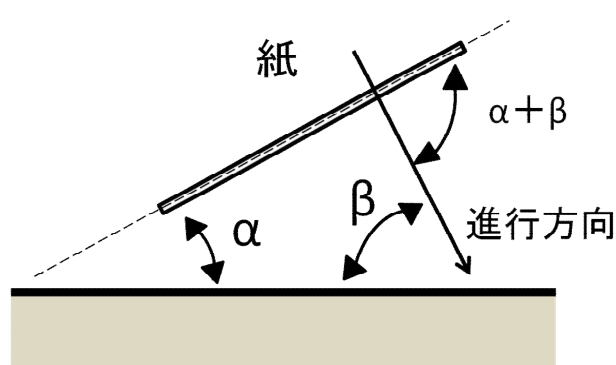


図 1

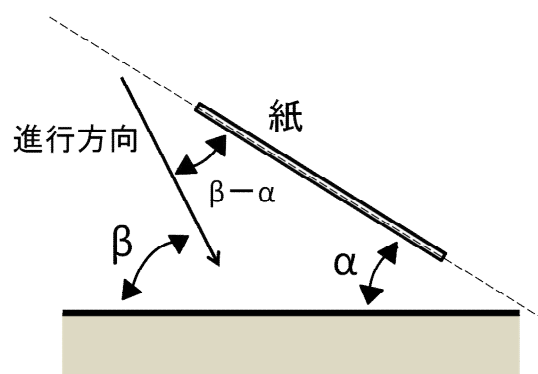


図 2

結果

θ 、 α 、 β は度数法で表している。

θ	α	β	$\alpha + \beta$	滑ったかどうか (○ or ×)
15	35	80	115	×
20	-2	79	77	○
25	23	61	84	×
30	34	67	101	×
35	29	68	97	×
40	35	69	104	×

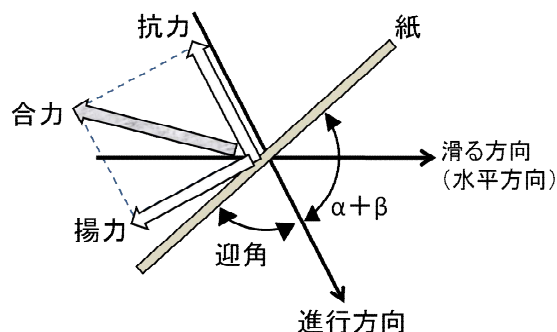
- ・滑ったのは $\theta = 20$ のときだけだった
- ・ α について、 $\theta = 20$ のときだけ 0 に近い
- ・ $\alpha + \beta$ について、 $\theta = 20, 25$ の時以外で 90 より大きい

考察

β の値から考えると紙は滑る前から滑る方向と同じ向きに速度成分を持っている。慣性の法則から、着地前後に紙が減速しない限り紙は地面を滑る。そこで $\alpha + \beta$ の値を 3 つにグループ分けして紙を減速させる力が発生するかどうかを考える。

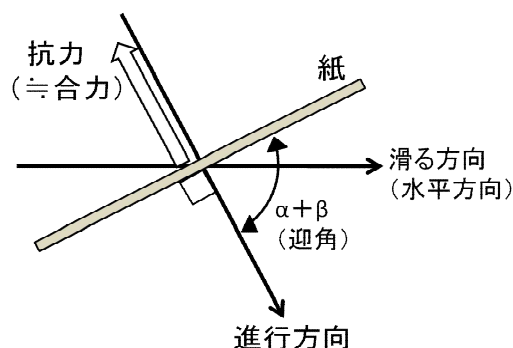
(1) $90^\circ < \alpha + \beta$ のとき

まず迎角は $\alpha + \beta$ ではないほうの角である。このとき揚力と抗力の方向は右図のようになる。揚力と抗力の合力の向きは滑る方向に逆である。よって紙は減速して地面を滑らなかったと考えられる。



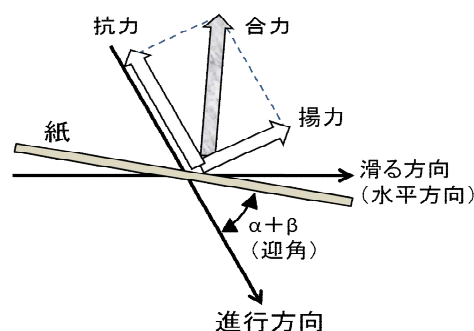
(2) $90^\circ \simeq \alpha + \beta$ のとき

揚力は抗力に対して非常に小さいので、揚力と抗力の合力は抗力とほぼ一致すると考えられる。抗力は進行方向とは逆方向の力だから、滑る方向とも逆方向である。よって紙は減速して紙は滑らなかったと考えられる。



(3) $90^\circ > \alpha + \beta$ のとき

揚力と抗力のそれぞれの水平方向の成分の向きは互いに逆であるから、合力は滑る方向と垂直、または同じ向きの成分を持つことがあり得る。よって紙は減速せず、前述のように慣性の法則で地面を滑ると考えられる。実際に、 $\theta = 20^\circ$ のとき紙は滑っている。



結論

落下する紙が地面を滑る理由は、水平方向において着地前の紙の速度が保存されて着地後も慣性で移動するからである。よって落下する紙が地面を滑る条件は、揚力と抗力の合力が水平方向と垂直以下の角度になって紙を減速させないことである。

今後の課題

今回の実験結果だけでは大雑把な考察しかできなかったため、紙の速度・加速度を計測したり、別の実験で揚力や抗力の大きさを具体的に求めたりして、より細かい考察をできるようにしたい。また、 θ の値を変化させていたが本当に変化させるべきは α や β の値であるから、 α と β の値を直接変化させる実験をすべきだと考える。

反省・感想

課題研究において自分は主に二つのことを反省しなくてはいけない。まず一つは計画を全く立てなかったことだ。課題研究は二年生の間を丸々使えるがそれに甘んじて実験を先送りし続けた結果、上記の研究を始めたのは12月になってしまった。8月頃にはテーマが決まっていたが、研究内容を精査しなかったせいで二ヵ月近くを棒に振ってしまった。また期限を守れずに徹夜を繰り返すことになり、要旨や論文の内容がひどいことになってしまった。二つ目は担当教官とコンタクトを取らずに研究を進めてしまったことだ。教官に説明するのが面倒くさく感じてしまい、一人で研究やポスター作製を行い添削を受けなかったために、研究の進行やポスター発表で多くの困難が発生した。

研究に関して、悪くない題材を選んだと思っているが、適切な実験装置を作るのに苦労した。上記の実験装置も紙に余分な力や運動を与えないことには成功したものの、操作できるパラメータが実験結果に直接関係しないことが問題となった。データの数は一明らかに少ない。スタートが遅かったにしてももっと実験することができた。面倒くささに負けずに頑張れる忍耐力が必要だと強く感じた。

ダイラタンシー現象と液体の界面張力の関係

~ The Relation between Dilatancy Phenomenon and Interfacial Tension ~

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

水野智晴 河崎喜斗

はじめに：ダイラタンシー現象とは

不溶性の粉粒体と液体（例：片栗粉と水）の混合物中で、粉粒体が稠密に充填（沈殿）し、その配列が崩される際に、ずり速度が小さいときは粒子は自由に動くことができるが、大きくなると動きが限定される。ここで、ずり速度と粒子の流動の速度には正の相関があるから、**粒子の流動が遅いときにはその混合物は液体のように振る舞うが、速いときには固体のように振る舞う**。この現象を、**ダイラタンシー現象**という。これは、最密充填の状態から配列が崩れるとき、粉粒体全体の体積が大きくなる。この時、粒子間隙も大きくなるが、間隙内の液体粒子の物質量は変化しない。そのため、**液体粒子が陰圧となり、変形を妨げようとするので、固体のように振る舞う（以下ダイラタント硬化）**。

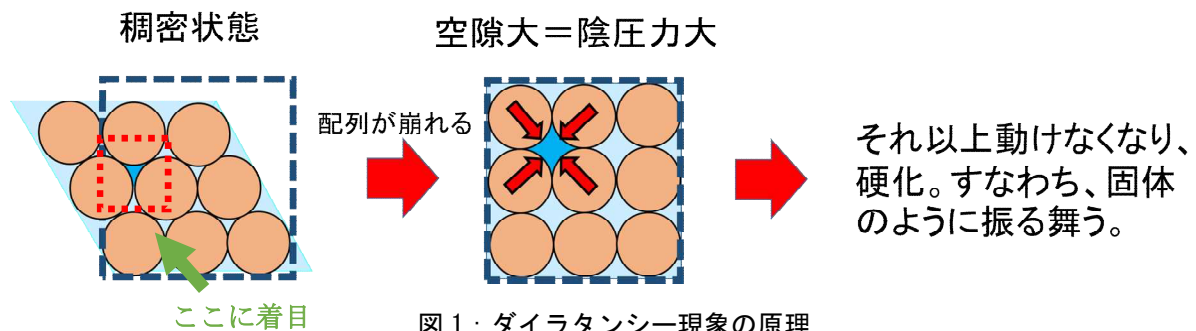


図 1：ダイラタンシー現象の原理

研究目的

界面張力は異なる物質間に働く引力であるので、ダイラタント硬化時に分子間の引力に影響すると考えることが出来る。そこで、本研究ではダイラタント流体中を間欠的に動く力学台車の速度を比較することで、界面張力や水溶液のモル濃度を変えた時のダイラタント硬化の強度を比較する実験を行った。

方法

実験 1：ラウリル硫酸ナトリウム（界面活性剤）水溶液のモル濃度と界面張力の関係を求める。

- ① ラウリル硫酸ナトリウムと純水を用いて、モル濃度を 0.0020, 0.0040, 0.0060, 0.0080, 0.010, 0.025, 0.050, 0.10 mol/L に調整したラウリル硫酸ナトリウム水溶液を作る。
- ② 純水と①で調整した水溶液、電子ばかりを用いて、ビュレット（外径 $r=3.3\text{ mm}$ ）から滴下される水滴 10 滴分の質量の平均から 1 滴分の質量を測定する。この操作を 5 回繰り返した。
- ③ 界面張力 γ は水滴 1 滴分の質量 m 、ビュレットの先端外径 $2r$ 、重力加速度 g を用いて以下のようにして求める。

界面張力を γ [N/m] とすると、

$$\text{等式：} 2\pi r \gamma = mg$$

が成り立つ。これを γ について解くと、

$$\gamma = \frac{mg}{2\pi r}$$

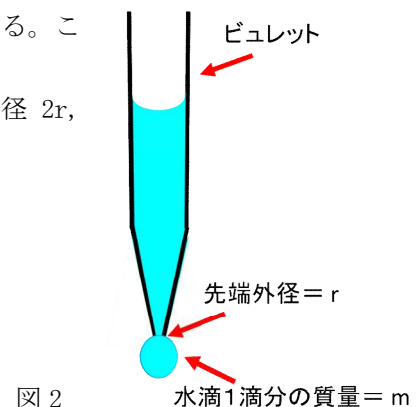
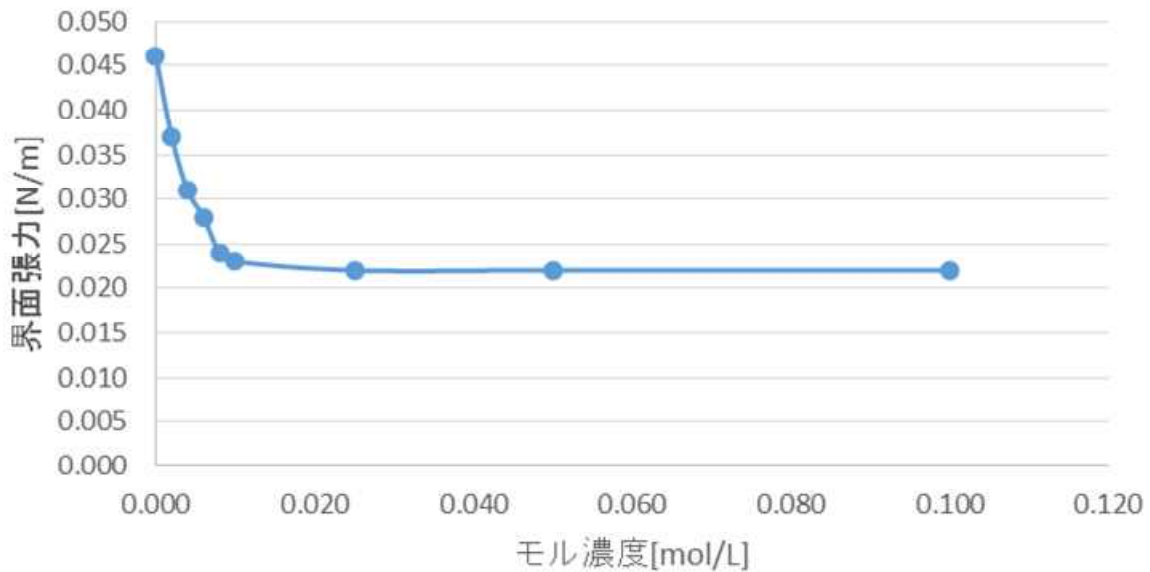


図 2

結果 1



グラフ 1：ラウリル硫酸ナトリウム水溶液のモル濃度と界面張力の関係

グラフ 1 より、界面張力は、ラウリル硫酸ナトリウム水溶液のモル濃度が 0.010 mol/L になるまでは下がり続けたが、それ以降は変化しなかった。（*実験時の水温は 15 ℃）

実験 2：ラウリル硫酸ナトリウム水溶液のモル濃度と力学台車の速度の関係を求める。

- ① 実験 1 で用いた 9 種類の液体 100 mL と片栗粉 100 g とを直方体の容器に入れ、ダイラタント流体を作る。
- ② それぞれを攪拌させ、10 分間放置して片栗粉を均一に沈殿させ、稠密の状態にする。
- ③ ストッパーを外して自作した装置（図 3）を動かし、その様子を撮影する。
- ④ ①～③の操作をそれぞれ 5 回繰り返す。
- ⑤ 撮影した動画を解析して、力学台車が 1 mm 進むのに要した時間からその速度を求める。得られたデータを、縦軸に速度、横軸に進んだ距離を取ったグラフにまとめ、界面張力の依存性を調べる。また、30 mm から 130 mm まで進むのにかかった時間も比較する。

〈装置の説明〉

台車の一端に軽い糸を付け、その糸の他端には定滑車を通して 100 g のおもりをつるした。これにより、力学台車を一定の力（0.98 N）で引くことができる。ダイラタント流体の入った容器を力学台車の上に滑らないように固定する。ダイラタント流体中に金属の棒（厚さ 2 mm）を容器の底面に触れないように垂直に入れ、その棒の座標を固定する。これにより、力学台車は糸によって一定の力で引かれるが、棒周辺のダイラタント流体が硬化すると、力学台車の進行が妨げられ、速度が低下するようになっている。

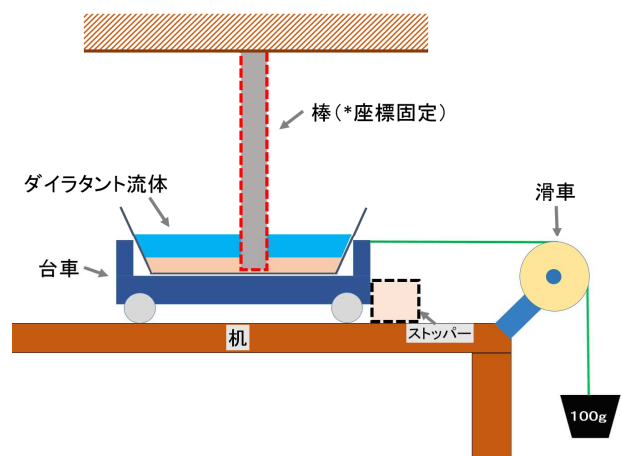
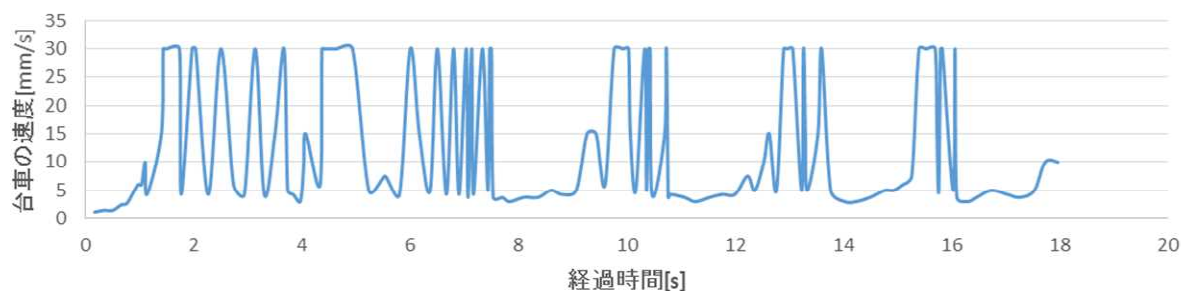
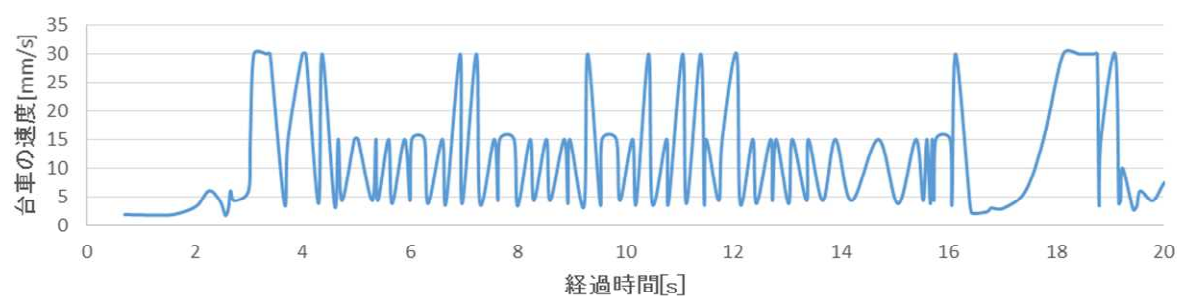


図 3：実験装置

結果 2.1

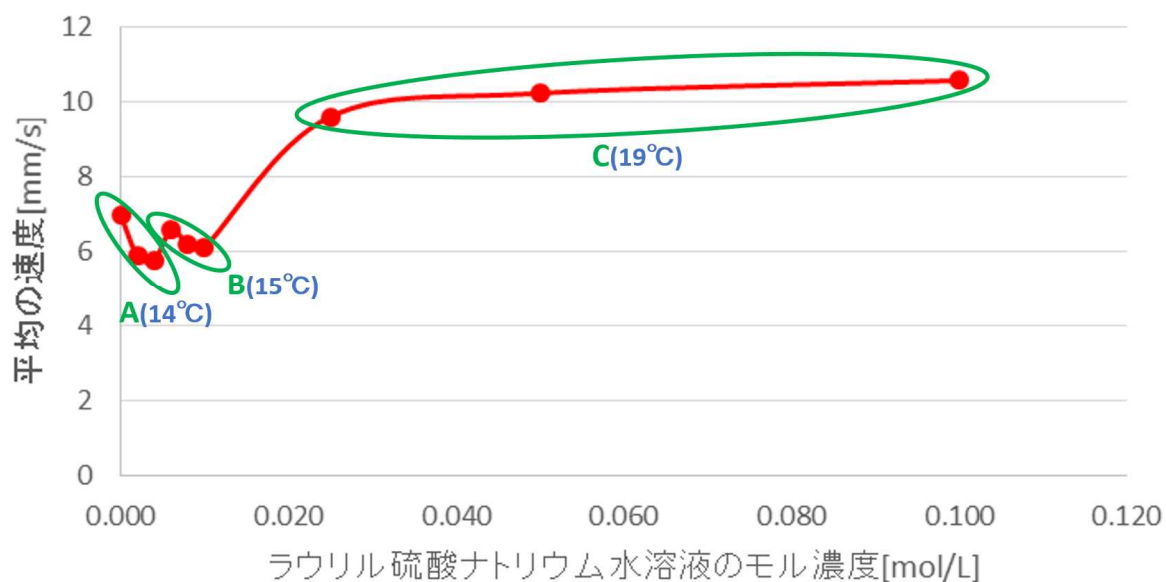


グラフ 2.1-a : 台車発車後の経過時間と台車の速度の関係 (0.0 mol/L)



グラフ 2.1-b : 台車発車後の経過時間と台車の速度の関係 (0.010 mol/L)

結果 2.2



グラフ 2.2 : ラウリル硫酸ナトリウム水溶液の濃度と台車の平均速度の関係
(*A、B、C はそれぞれ別の日に行った。()内は、実験時の水温を表す。)

考察

グラフ 2.1-a, b より、台車が一定の速度に達するとその直後に大幅に減速し、また台車が加速して一定の速度に達すると再び減速し……を繰り返している。これより、ダイラタンシー現象が起きていると考えられる。

また、前提として、力学台車の平均の速度が大きい時ほど、ダイラタント硬化の強度は弱いものとする。これは、台車の速度大きいのは、ダイラタント硬化による台車の減速が小さいからだという考えに基づくものである。

まずグラフ 2.2 を、同水温だった A、B、C 毎に着目すると、A、B ではラウリル硫酸ナトリウム水溶液のモル濃度が濃いほど台車の平均の速度は小さいのに対し、C では水溶液のモル濃度の変化の割に平均の速度の変化があまり見られなかった。さらに結果 1 から、A、B の範囲では、水溶液のモル濃度が濃いほど界面張力は大きいのに対し、C の範囲では水溶液の濃度の変化に対し、界面張力はほとんど変化しなかった。また、ラウリル硫酸ナトリウムの密度は 1.01 g/cm^3 なので、どのモル濃度の水溶液の質量もほぼ等しいといえる。これらのことから、ダイラタント硬化の強度は、混合する液体の物質量に関係なく、界面張力が小さいほど強くなるといえる。

結論

混合する液体の界面張力が大きいほど、ダイラタント硬化の強度は低くなった。

今後の課題

今回の研究の実験は 3 日に分けて行い、その 3 日とも水温が異なっていたため、グラフ 2.2 の A、B、C の値に連続性がなかった。そのため、現段階では結論も推測に過ぎないため、実験は水温（気温）があまり変わらない部屋で 1 日のうちに行いたい。また、他の種類の界面活性剤も用いてみたい。

参考文献

岩井一輝（2016）『ダイラタンシー現象における力と速度の関係』 千葉県立船橋高等学校 3 年

中山舞香（2016）『界面張力差と石鹼ボードの速度』 千葉県立船橋高等学校 2 年

<http://www.heishin-dispenser.jp/compass/compass01.htm> （2017. 1. 24）

紙飛行機のエレベーターの折り曲げによる飛行の変化

Paper Planes' Flights Depend on their Elevators' Condition

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

堂脇大志 田中瑞希

はじめに

同じ紙飛行機を複数機作ると、それぞれの微妙な折れ曲がりによる差異が出てくる。これが結果として、飛行距離や滞空時間、軌道といった飛行に大きな影響をもたらす。本研究では機体の後方部分を意図的に曲げて、一見同じように見える機体でどこまで・どのように飛行の仕方が変わるのかを研究した。

目的

紙飛行機の後方部分（以下エレベーターⁱと呼ぶ）を変化させたときの飛行の変化を調べる。また、その結果を応用することによって意図的な折り曲げによって飛行距離、滞空時間を伸ばすことができるかを検討する。

方法

紙飛行機については、使用する発射機との相性・作成手順などを総合的に判断し、図 1 のような形のものを用了。なお紙については飛行中の変形を考慮して厚紙（コクヨ KJ-M15A4-50）とした。精密な実験にするため、紙飛行機の作成過程はすべてマニュアル化し、万力を利用するなど人の手が直接触れることのないようにした。

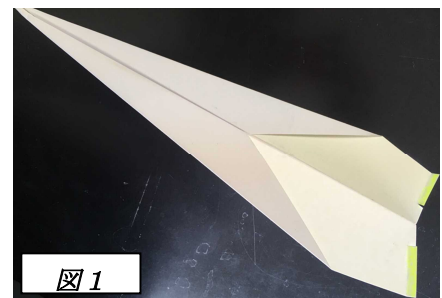
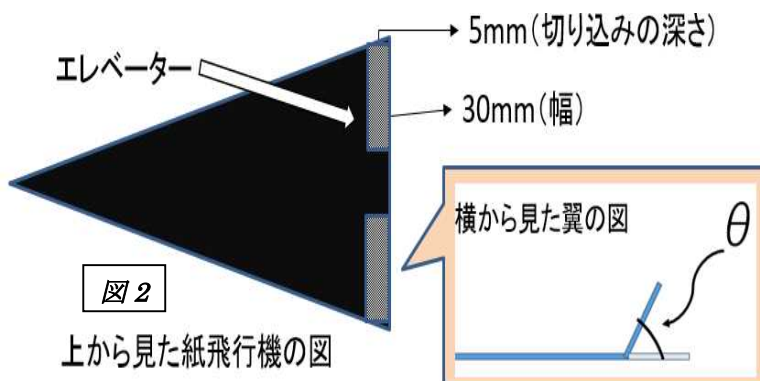


図 1

変化させるのはエレベーターの折り曲げる角度・深さ・幅である（図 2 参照）。エレベーターの角度については、金属板 2 枚を用いてはさみ、固定する手法をとった。エレベーターは飛行中に空気抵抗により力を受け、変形することが考えられる。当初は少量のボンドⁱⁱを用いて固定したが、その後の予備実験において、必要ないと判断したため、本研究にある実験においては使用していない。



実験では、自作の発射機（図 3）を用いて紙飛行機を発射した。発射機は、実験の信頼性を高めるため、直流電源で駆動するモーターを使用した。これによって速度を同じ条件にして実験ができる。なお本研究ではすべての実験で発射角 15° ・速さ

ⁱ 実際の旅客機などでは水平尾翼部分に制御可能な昇降舵（エレベーター）があり、紙飛行機では一枚翼であるが、相対的な位置・働きが似ていたため、このように呼ぶこととした。

ⁱⁱ 用いたボンドの量は極めて小さく、それぞれの紙の質量の誤差を考慮すると無視できるものとした。

10m/sⁱⁱⁱに固定している。

測定したのは飛距離（メジャーを使用）と滞空時間（レコーダーの録音からの波形分析で得る）であり、実験 1 では動画解析をして軌道も調べた。

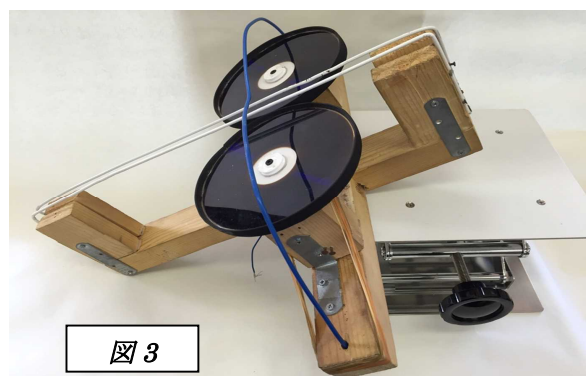


図 3

実験 1

結果

エレベーターの折り曲げ角(θ)と飛行の大まかな関係を調べた。折り曲げ角を -90° から 90° までの 30° ごとに設定し、7 種類の紙飛行機を作成した。1 条件当たり 6 回実験を行った（同じ紙飛行機を 2 機作成し、それぞれ 3 回飛ばした）。

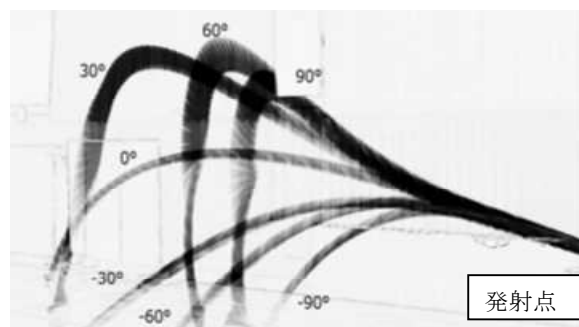


図 4 それぞれの条件における代表的な軌道

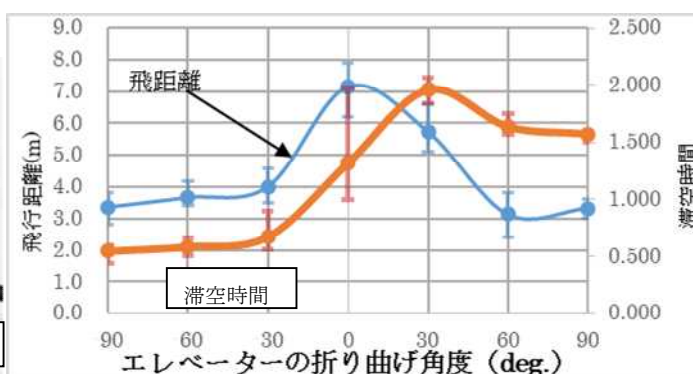


図 5 エレベーターの折り曲げ角と飛距離・滞空時間の関係

- $\theta > 0^\circ$ の機体は、機首が上を向き高く飛んだ。
- $\theta < 0^\circ$ の機体は、すぐに機首が下を向き着陸した。
- 全ての機体において軌道が途中まで一緒である。

考察

飛行中、エレベーターには空気があたり、その反動で鉛直方向の力が発生する（図 6）。この力により紙飛行機の回転運動が起こる。

$\theta > 0^\circ$ の機体は、鉛直下向きの力が発生する為、機首が上を向く回転運動をし、高度が上昇する。しかし、それに伴う高度の上昇・減速によって飛距離は伸びなかった。

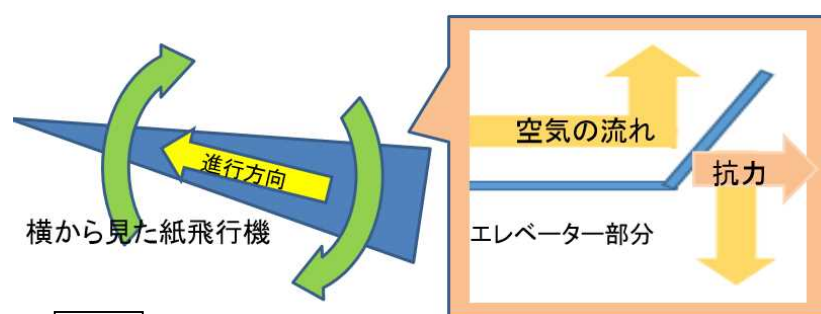


図 6

$\theta < 0^\circ$ の機体は、鉛直上向きの力が発生する為、機首が下を向く回転運動をし、そのまま着地したため飛距離が伸びなかった。

滞空時間は高度が上昇する機体で伸びる傾向があったが、 θ が大きくなるほどエレ

ⁱⁱⁱ 予備実験で人間が紙飛行機を発射するときの速度を測り、それに近い値であるため採用した。

ベーターが受ける空気抵抗が大きくなるため、ある程度 θ が大きくなるとそれ以上滞空時間が伸びることはなかった。

実験 2

実験 1 の結果から飛距離と滞空時間が最大となる機体条件を調べる為、折り曲げ角を $0^\circ \sim 45^\circ$ までの 15° おきに細分化して実験を行った。また、エレベーターの深さも飛行を変化させる要因となるため、5, 10, 15mm と変えた。1 条件あたり 9 回 (3 機を 3 回ずつ飛ばす) 行った。

本実験ではエレベーターの深さと角度の 2 条件を同時に変化させており、エレベーターがどれだけ折れ曲がっているかという指標が必要となる。そこでこれを正弦面積とし、以下のように定義する。

$$\text{正弦面積} = (\text{エレベーターの幅}) \times (\text{深さ}) \times (\text{折り曲げ角の正弦})$$

これは正面から見た見かけのエレベーターの面積を意味する。

結果

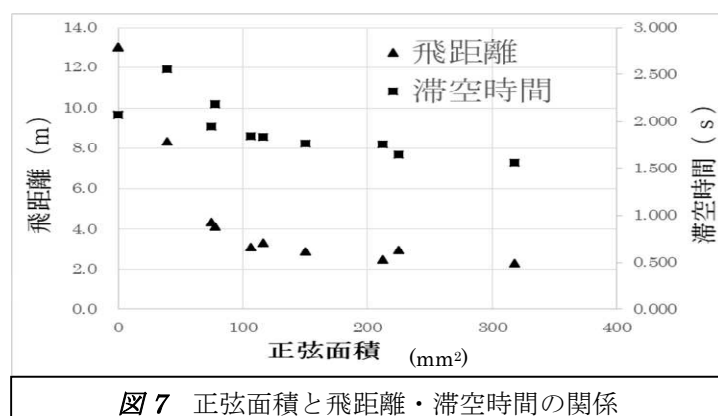


図 7 正弦面積と飛距離・滞空時間の関係

正弦面積と飛距離・滞空時間の関係は次のようになった。

このグラフから正弦面積が比較的小さい範囲において滞空時間や飛距離の変化が激しいことがわかる。

実験 3

実験 2 とそれに伴う予備実験の結果から、本実験においては正弦面積が同じであれば、それらの機体は同じような飛び方をする事が確かめられた。より詳細な結果を得るには、正弦面積を小さくする必要があるが、角度をこれ以上小さくするのは実用上不可能である。そこで今回は角度を最小実用角の 15° に固定し、深さを 2, 4, 6, 8mm, 幅を 10, 20, 30mm と変化させた。

結果

実験環境は実験 2 と統一し、得られたデータと図 7 を統合した (図 8, 9)。

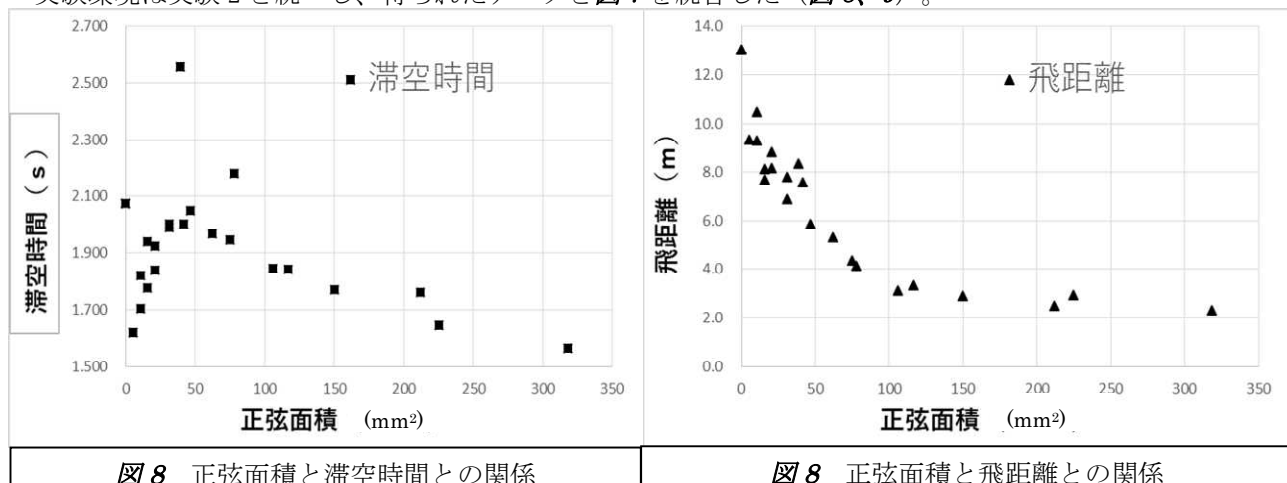


図 8 正弦面積と滞空時間との関係

図 8 正弦面積と飛距離との関係

考察

正弦面積が大きいとき、紙飛行機は上に飛ぶ・空気抵抗が大きいという要因から失速しやすい。紙飛行機が高く飛ばば滞空時間を延ばすことが出来るが、失速するこの限りではない。よって紙飛行機が失速しない範囲で正弦面積が大きいものが、長い滞空時間を記録した。

飛距離は正弦面積が大きいと紙飛行機の持つ水平方向の速度の多くが鉛直方向に変換されてしまうため、すべての機体で減少傾向にあった。

結論

今回の環境においては、エレベーターの折り曲げがないもので飛距離が最大となる。
エレベーターの折り曲げと滞空時間の変化の関係は次のとおりである。

1. 上に曲げる→機体が上昇

1-A. 上に少し曲げる（飛行中に上昇はするが、途中で失速しない程度の正弦面積にする）

→この条件内で正弦面積のより大きい機体がより長い滞空時間を示す

1-B. 上に大きく曲げる（1-A のときより正弦面積が大きくなるようにする）

→正弦面積が大きくなればなるほど緩やかではあるが滞空時間は減少傾向に転じる。

2. 下に曲げる→機体は下降

今後の課題

本研究の今後の大きな課題として、理論の一般化があげられる。今回の実験では、すべて 1 種類の紙飛行機のみでしか実験を行っていないため、正弦面積の値にかかわらず相対的に本実験と同じ傾向が出ることを確かめ、他の紙飛行機にも応用できるようにする必要がある。

今回は紙飛行機の作成過程のマニュアル化・万力の使用・作成時の軍手の着用などで品質を統一したが、個体差は小さいとは言えない。紙飛行機の作成過程にはさらなる工夫が要される。また、実験は無風の屋内で行ったが、上昇気流などが発生していた可能性もないとは言えないため、これらの改善による実験の信頼性の向上を図りたい。

参考文献

“Make a Fun Paper Plane Launcher” <https://www.guidencentral.com/make-a-fun-paper-planes-launcher>（2015 年 11 月にアクセス）

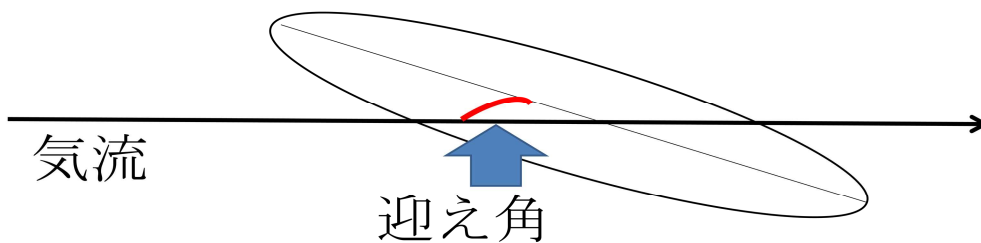
紙飛行機の主翼の迎え角を変えたときの揚力の変化

The Lift when Changing the Angle of Attack of the Main Wing of a Paper Plane

千葉県立船橋高等学校 理数科 2 年
谷口遼麻 李瑛博

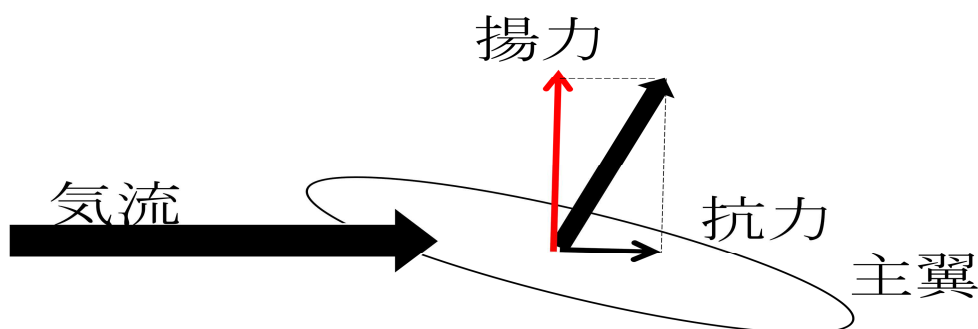
目的

気流と主翼の間にできる角度を迎え角と言う。この迎え角が大きくなるにつれ機体の鉛直方向にはたらく揚力は大きくなるが、ある角度に達すると失速し落下してしまう。この角度を失速角と言い、揚力の変化の傾向をつかみ、失速角を求めることを目的とする。



理論

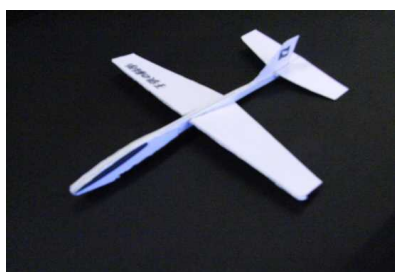
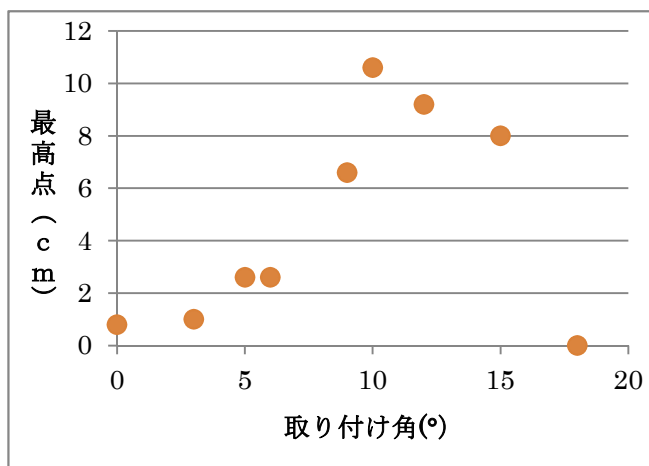
飛行機等の翼に空気が当たると翼の上面と下面に分かれて空気が流れる。このとき、上面に流れる空気の方が下面に流れる空気よりも速度が大きいので、上面のほうが下面よりも圧力が小さくなり圧力差によって翼の面に垂直な方向に上向きの力がはたらく。この力を分解したときに鉛直方向にはたらく力が揚力であり、この揚力が重力よりも大きくなったとき、機体は上昇する。



方法

主翼が機体に対して 0° 、 3° 、 5° 、 6° 、 9° 、 10° 、 12° 、 15° 、 18° の角度で取り付けられている組み立て式の紙飛行機（長さ 18cm 翼の幅 8cm 重さ 8g）をケント紙で作成する。紙飛行機の主翼と気流との間にできる角度が迎え角であるのだが、実験は空気の流れの存在しない室内で行うので、気流は紙飛行機の進行方向と水平になる。よって、主翼の取り付け角がそのまま迎え角となる。

機体をゴム(ばね定数 $k=1.98\text{N/m}$)を用いた自作のゴムカタパルトを使って発射角 0° でそれぞれ 5 回ずつ室内で飛ばす。飛んでいる機体を横からカメラで撮影し、発射地点の高さを基準として最高点をメジャーで測定する。



仮説

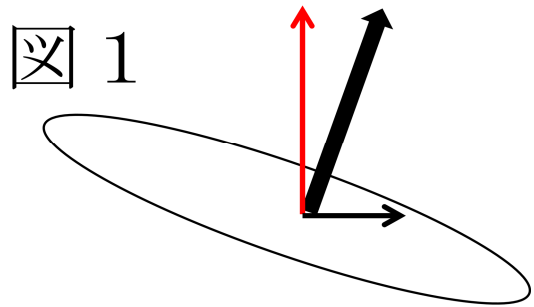
原理より揚力が重力よりも小さくなったとき、機体は失速し落下する。このときの迎え角が失速角である。予備実験として取り付け角が 20° の紙飛行機を飛ばしたところ、全く飛行しなかったことから、迎え角 20° において失速角はすでに超えており、失速角は 20° よりも手前にある。また、失速角に達するまでは迎え角と揚力との間に正の相関関係がある。

結果

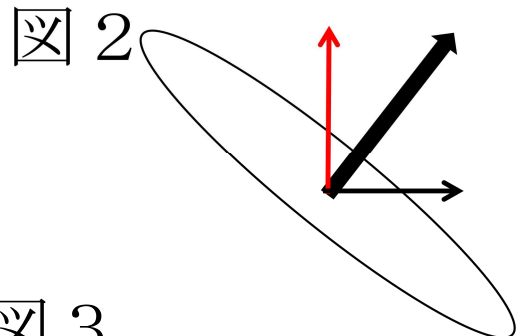
- 右図のように、取り付け角が $0^\circ \sim 10^\circ$ の範囲においては、取り付け角と紙飛行機の最高点との間に正の相関関係が見られた。つまり、迎え角が大きくなる程、揚力が大きくなり、機体が高く飛行したことになる。
- 取り付け角が 10° から 15° の範囲においては、取り付け角と紙飛行機の最高点との間に負の相関関係が見られた。つまり、迎え角が大きくなる程揚力が小さくなり、機体が低く飛行したことになる。
- 取り付け角が 18° のときには紙飛行機は飛行しなかった。つまり、迎え角 18° において揚力が失われ、失速角を越えたという事になる。

考察

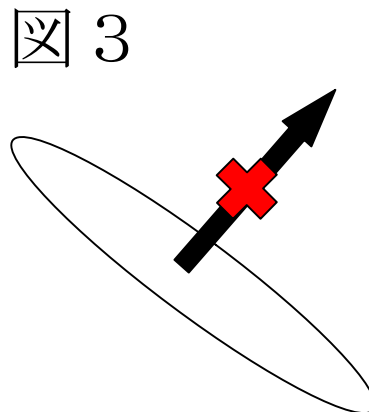
- 取り付け角が $0^{\circ} \sim 10^{\circ}$ の範囲においては取り付け角の角度が大きくなるにつれて主翼の上面と下面での空気の圧力差が大きくなるので主翼にはたらく力が大きくなる。その結果、揚力も増加した為、最高点の高さが高くなった。(図1)



- 取り付け角が $10^{\circ} \sim 15^{\circ}$ の範囲においては取り付け角の角度が大きくなるにつれて主翼にはたらく力は大きくなることは変わらない。しかし、力を分解したときに水平方向にはたらく抗力のほうが大きくなり、逆に揚力が小さくなったので、最高点が低くなった。(図2)



- 取り付け角が $15^{\circ} \sim 18^{\circ}$ の範囲においては、上面の気流が翼にそって流れることができず、下面のみに流れる。そのため、圧力差が生じないので、主翼に力が働かない。よって揚力が発生しなくなり、機体は失速した。



結論

- $0^{\circ} \sim 10^{\circ}$ の範囲では迎え角と最高点との間に正の相関関係がある。
- $10^{\circ} \sim 15^{\circ}$ の範囲では失速はしないが揚力は小さくなる。
- 今回扱った紙飛行機においては 10° が最も上昇しやすい角度である。
- 失速角は $15^{\circ} \sim 18^{\circ}$ の範囲に存在する。

展望

- 今後、 15° から 18° の間をより重点的に実験することでそこにある失速角の特定につなげる。
- 紙飛行機の種類によって揚力や失速角に差が出るのかを調べる。
- 揚力の大きさを数式で表せるようにする。

界面張力差と石鹼ボートの速度

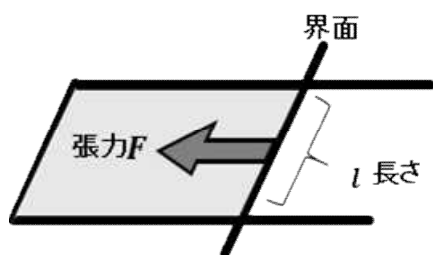
Motion of Floating Tips Powered by Soap

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

中山 舞香

はじめに

界面張力とは

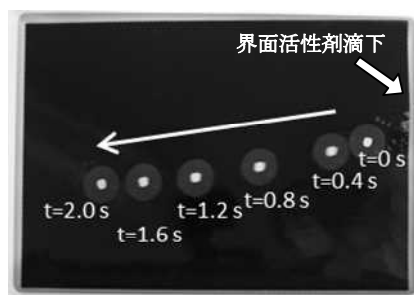
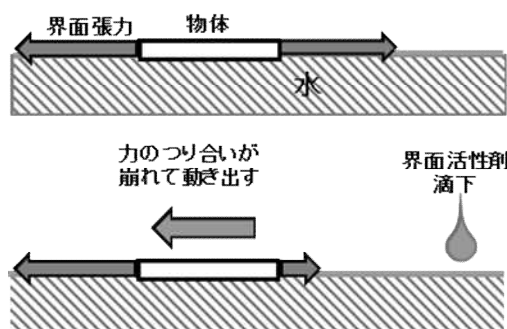


長さ l の界面に張力 F が働く図

物質を構成する分子間には分子間力がはたらくため、物体の表面は凝集しようとする力、張力が見られる。状態の異なる界面の単位長さあたりの張力を界面張力 γ という。

$$\text{界面張力 } \gamma \text{ [N/m]} = \frac{\text{張力 } F \text{ [N]}}{\text{長さ } l \text{ [m]}}$$

石鹼ボートとは



↑石鹼ボートの動き

物体を水に浮かべると、左上の図のように界面張力がつりあって静止する。そこで、左下の図のように界面活性剤を滴下すると水・空気間の界面張力が下がり、周囲の力のつり合いが崩れて物体は界面活性剤を滴下した地点から離れるように動き出す。

目的

界面活性剤には石鹼などに含まれ、水の界面張力を低下させる作用がある。石鹼ボートとは水に小片を浮かべ、界面活性剤を滴下すると滴下した側の小片の界面張力が下がり、滴下点から離れるように(界面張力の強い方に)小片が動き出す現象である。子供の時よく遊び、石鹼ボートは界面活性剤の濃度や種類によって違う動きを見せることがわかった。

石鹼ボートの動きを制御するにはどうすれば良いか。本研究では界面活性剤の濃度と界面張力の関係を定量的に測定し、実際に各濃度における石鹼ボートの動きの解析・比較を行った。界面活性剤として洗剤など身近なところで使用されているラウリル硫酸ナトリウム水溶液を使用した。

実験 1 (界面張力の測定)

方法 1 (滴下法)

ビュレット (先端外径 3.3mm) に測定する界面活性剤を入れ、ゆっくりと滴下した。

界面張力を γ (N/m) とし、ビュレットの先端外径を $2r$

(m)、溶液 1 滴分の質量を m (kg)、重力加速度を g (m/s²)

とおくと、滴下直前の溶液にかかる重力と力のつり合いから

$$2\pi r\gamma = mg$$

よって

$$\gamma = \frac{mg}{2\pi r}$$

と界面張力を求めることができる。

今回は溶液 100 滴分の平均から 1 滴分の質量を測定し、各濃度につき 10 回測定を行った。

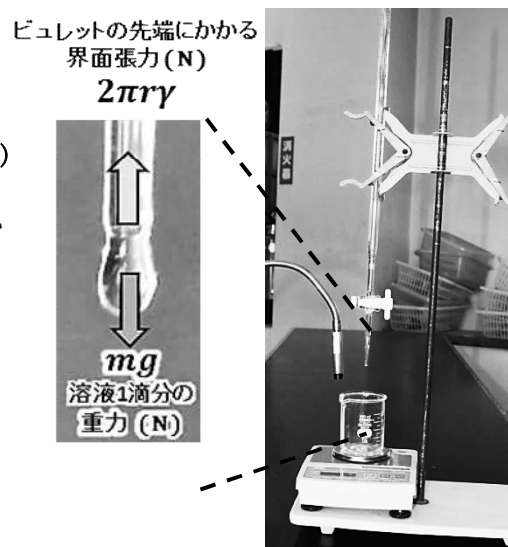


fig 1.1 滴下法の様子

ビュレットから溶液が滴下する直前の力のつり合い式から界面張力を測定する。

結果 1

0 mol/L と 0.010 mol/L の間では 0.047 N/m から 0.025 N/m と界面張力が急激に減少するが、一方で 0.010 mol/L 以上の濃度では界面張力の変化は小さい。

そこで、界面張力が濃度に依存する領域 (0 ~ 0.010 mol/L) と依存しない領域 (0.010 mol/L ~) に分けた。

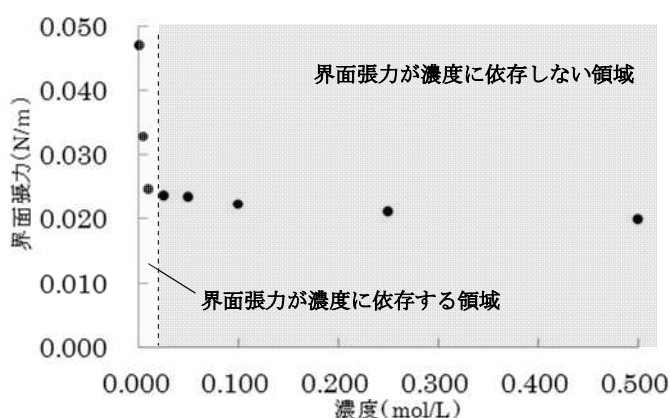


fig 1.2 ラウリル硫酸Na濃度と界面張力の関係

実験 2 (石鹼ボートの動きの解析)

滴下した界面活性剤は拡散により濃度が低下する。そこで、界面張力が濃度とともに変化しやすい 0.005 mol/L、最も変化しにくい 0.500 mol/L (飽和水溶液)、その中間点として 0.025 mol/L の 3 種類の水溶液で石鹼ボートの動き方を調べる実験を行った。

方法 2

桶 (直径 50.0 cm × 深さ 15.0 cm) に水道水 10 L を入れ、その上にアルミ片 (直径 6.5 mm, 厚さ 11 μm, 質量 9.9 μg) 10 枚を浮かべた。アルミ片にかからないように界面活性剤 0.10 mL を滴下し、アルミ片の様子を動画撮影した。実験は各濃度につき 10 回ずつ行い、典型的な動きをしているものをグラフにして比較した。

速度の解析には Image J を使用した。

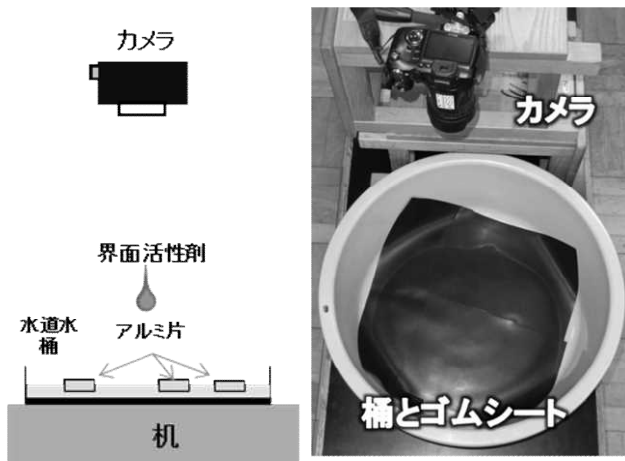


fig 2.1 実験装置の様子

バットにアルミ片を浮かべ、界面活性剤を滴下する。アルミ片の様子を動画で撮影する。

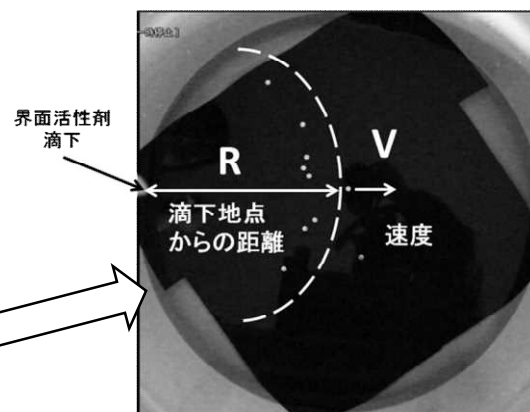


fig 2.2 溶液滴下直後のアルミ片の様子

アルミ片は同心円状に広がっていく。

結果 2

fig 2.3 は 0.025 mol/L の 10 個のアルミ片の $v-t$ グラフである。アルミ片は同心円状に並んで動くため(fig 2.2)、滴下点からの距離によって動き出す時間に違いができる。それぞれの傾きを比較すると、滴下点から遠いものほど動き出すときの傾き(加速度)は小さくなる。動き出した後は徐々に減速していく。

次に滴下点からの距離とその時の速度を濃度別で比較した(fig 2.4)。最大速度は 0.500 mol/L で 169 mm/s、0.025 mol/L で 94 mm/s、0.005 mol/L で 77 mm/s と高濃度ほど大きくなる。

0.025 mol/L と 0.005 mol/L のグラフの形状が共に最大速度の後に減速する部分で一致した。

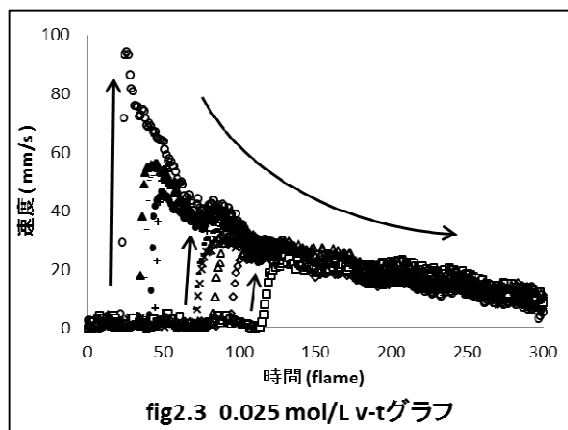


fig2.3 0.025 mol/L $v-t$ グラフ

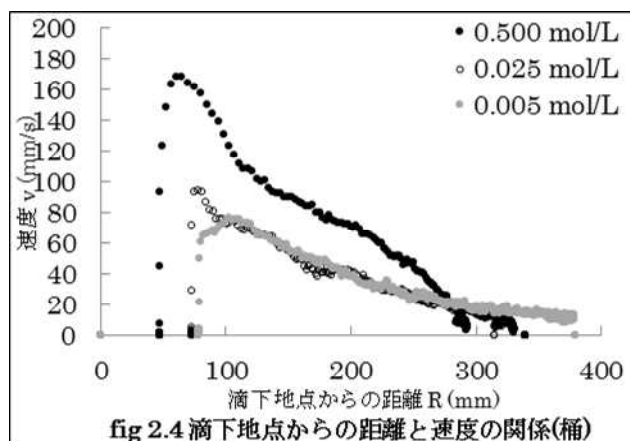


fig 2.4 滴下地点からの距離と速度の関係(桶)

考察 2

0.025 mol/L と 0.005 mol/L では石鹸ボートの動きに明確な違いが現れなかった。これは、0.025 mol/L の溶液を滴下すると拡散によってすぐに濃度が低下するためだと考えた。そこで、滴下後の拡散によって変化する界面活性剤の濃度、及び濃度に伴って変化する界面張力と滴下地点からの距離のモデルを作成した。

界面張力 γ の濃度 c の依存性を fig 2.5 のように $c < 0.05$ のときは傾き -19, 切片 1 の一次関数に、 $c > 0.05$ で $\gamma = 0.05$ 一定値になるものを仮定した。界面張力による溶質の移動が無視できるなら拡散は拡散方程式を用いてその様子を見ることが出来る(fig 2.6(a))。fig 2.5, fig2.6(a) より各時間での

溶液の界面張力 γ は fig 2.6(b)になる。界面張力の空間勾配($\Delta\gamma/\Delta r$)は fig 2.6(c)のようになる。アルミ片はその周りの界面張力差によって動くので、 $\Delta\gamma/\Delta r$ に比例する。

fig 2.6(c)よりアルミ片の加速度は時間とともに減少する。これは fig 2.3 のアルミ片が動き出すときの加速度が時間とともに減少することと定性的に一致する。

また、アルミ片は滴下地点に近いものから動き出し同心円状に広がることを説明することができる。

アルミ片は界面張力差によって動き出すが、fig 2.6(c)の山の部分から外れてしまうと界面張力差が無くなり、水との摩擦によってすぐに減速して止まる。小片が止まらずに移動するのであれば、界面張力差のある部分とともに移動しなくてはならず、小片は同心円状に並ぶ。

これらモデル図から、動く出しの加速度の減少、小片が同心円状に並ぶ、といった石鹸ボートの動きを説明することができる。

さらに、このモデルを用いると、界面張力の濃度依存性を知ることによって石鹸ボートの動きを予想できるようになる。

そこで、fig2.5 のグラフを元に界面張力の濃度依存性を変化させ、張力勾配を計算した2種類のグラフから予想をたてることにした。

まず、界面張力が濃度に依存している一次関数の傾きを変えて最小値 $\gamma=0.05$ を一致させたもの (fig2.7, fig2.8) を作成した。

次に、一次関数の傾きを一致させて最小値を $\gamma=0.43$ に変化させたもの (fig2.9, fig2, 10) の2種類のグラフを作成した。

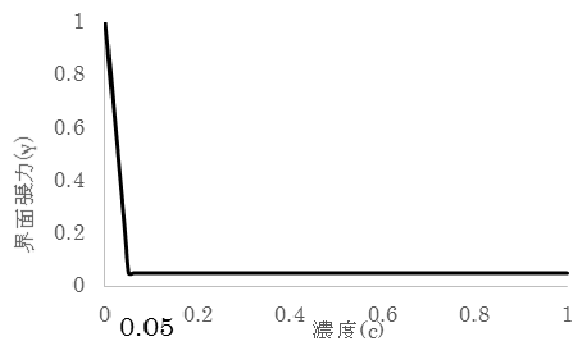


fig 2.5 γ -C図 モデル

$c < 0.05$ のとき、傾き-19、切片1の一次関数
 $c > 0.05$ のとき、界面張力は $\gamma=0.05$ で一定
 fig1.2の界面張力の濃度依存性を模倣した

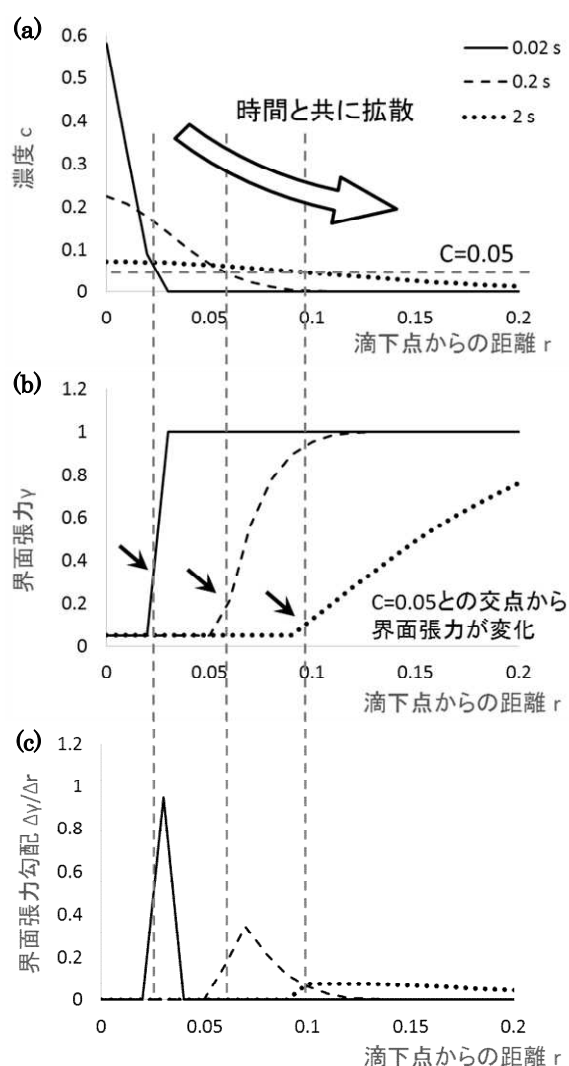
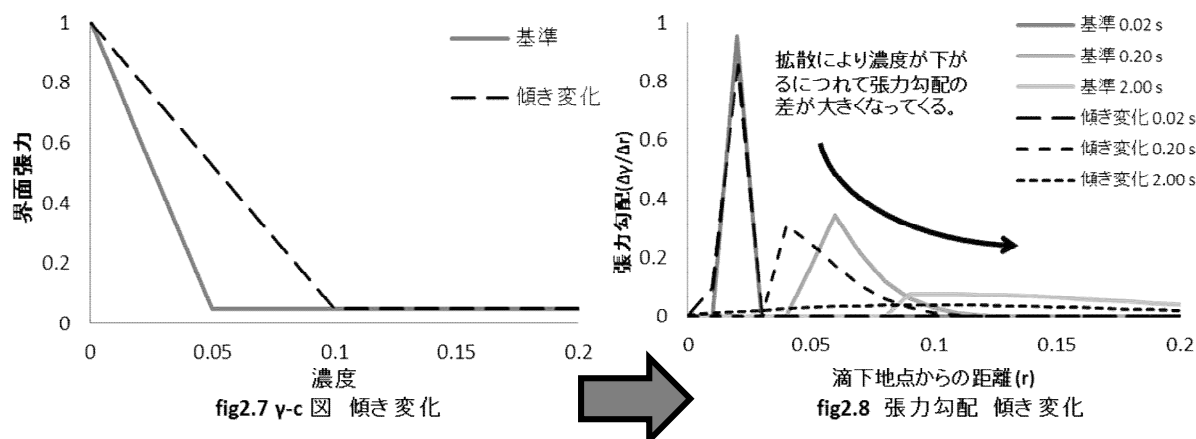
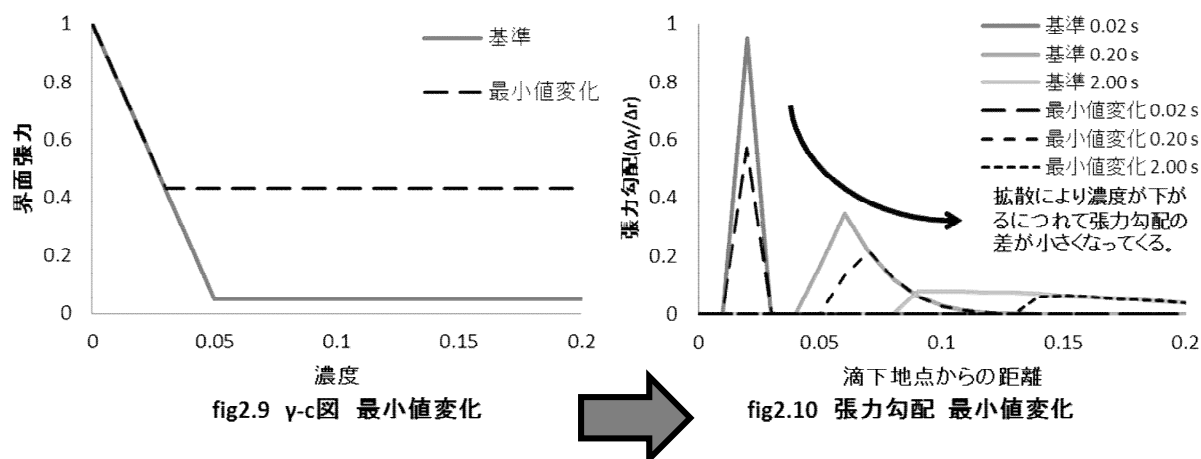


fig 2.6 界面張力の濃度依存性が fig 2.5 であったときの拡散による界面張力勾配の変化
 界面張力勾配は時間と共に減少しながら滴下点から離れていく。

界面張力の濃度に依存する部分の傾きを変えたとき、滴下直後では同じ張力勾配を生じるが、時間が経って濃度が低下すると差があらわれる。なぜなら、滴下直後で十分濃度が高い場合は水と2種の界面活性剤の界面張力差が一致していて、拡散で濃度が低くなった場合は2種の界面活性剤の傾きの違いが張力勾配に差をつくるからである。よって、界面張力が濃度に依存する部分の傾きが違う界面活性剤を使用すると、拡散が進むにつれて小片の動き出しの加速度の大きさに差が出てくると予想できる。



界面張力の最小値が変えたとき、滴下直後では2種の界面活性剤の張力勾配の大きさに差が出るが、時間が経って濃度が低下すると張力勾配の大きさの差が小さくなる。これは、滴下直後で十分濃度が高い場合は2種の界面活性剤の界面張力に違いがあるが、拡散で濃度が低くなった場合は2種の界面活性剤の傾きが同じで界面張力が一致するためである。よって、界面張力が一定になるときの値が違う界面活性剤を使用すると、拡散が進むにつれて小片の動き出しの加速度の大きさの差が小さくなると予想できる。



実験3 (考察2の検証)

考察2から考えられる予想を検証するために、実験1・2で使用したラウリル硫酸ナトリウム (SDS) の他、以下の3種類の界面活性剤を使用した。

ヘプタエチレングリコールモノドデシルエーテル ($\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}(\text{OCH}_2\text{CH}_2)_7\text{OH}$) (E07)

オクタエチレングリコールモノドデシルエーテル ($\text{CH}_3(\text{CH}_2)_{11}(\text{OCH}_2\text{CH}_2)_8\text{OH}$) (E08)

テトラデシル硫酸ナトリウム (STS)

方法 3

まず、実験 1 と同様に界面張力を測定する。本実験は各濃度につき 5 回測定した。

次に、実験 2 と同様に小片の動きを解析した。今回は各薬品 1.0×10^{-3} mol/L で 3 回ずつ試行した。fig2.8、fig2.10 に対応させるため、運動方程式より張力勾配を表すことができる各小片の動き出しの最大加速度を縦軸、そのときの滴下地点からの距離を横軸にとったグラフ (A-R 図) を作成した。

結果 3

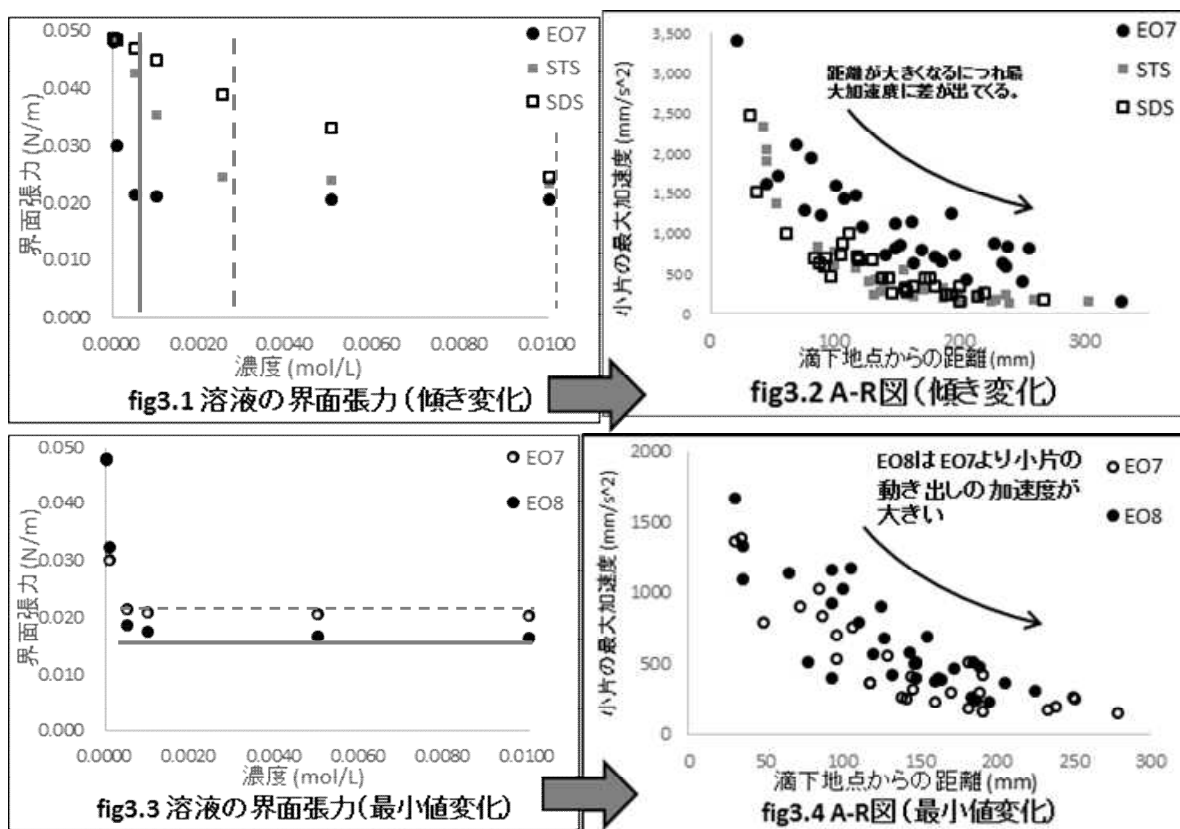
界面張力の濃度依存は E07, E08 は 1.0×10^{-3} mol/L まで、STS は 2.5×10^{-3} mol/L まで、SDS は 1.0×10^{-2} mol/L までとなっている。また、 5.0×10^{-4} mol/L 以上の濃度において、E08 の界面張力は 0.017 N/m で、E07 の 0.021 N/m より低い。考察 2 の通り、どの試薬も滴下地点からの距離が増加すると加速度が減少する。

傾きの違いの影響

濃度が大きいとき、E07、STS、SDS とともに水との界面張力差はほぼ等しいため、滴下直後の加速度もほぼ等しくなるが、拡散により薄まるにつれて E07 と STS, SDS の差が顕著になる。

界面張力の最小値の違いの影響

E08 は E07 より水との界面張力差が大きく、加速度も E08 が E07 より大きい。
実験により考察を検証することができた。よって、界面張力の濃度依存性から石鹼ボートの動きは予想可能である。



界面活性剤の種類によって、界面張力の濃度に依存する部分の傾きや一定になる値に差が生じる。

小片の動き出しの加速度と動き出したときの滴下地点からの距離のグラフ。

10 枚の小片を 3 回実験した。

結論・今後の展望

石鹼ボートの動きを制御するには、界面活性剤がもつ界面張力の濃度依存性を制御すれば良いことがわかった。

拡散現象と界面張力の濃度依存性からアルミ片の加速度が減少していくこと、アルミ片が同心円状に並ぶことといった実際の物理現象を定性的にとらえることが出来た。さらに、この結果と作成したモデルから界面張力と濃度依存性から石鹼ボートの動きを予想できるという仮説を立てられた。本研究では γ -C 図において、界面張力が濃度に依存している傾きが違うものや界面張力の最小値が違うものなど、様々な界面活性剤を用いて石鹼ボートの動きを予想・比較し、この仮説を立証することが出来た。

しかし、今回考えた拡散は1次元での拡散であり、界面張力による界面活性剤自身の拡散が速くなること（異常拡散）や、水の抵抗など外力の影響を考えていない。また、小片の動き出しの加速度しか議論できていない。そこで、これらをふまえた拡散モデルを作成し、小片が動いている最中の速度といった本研究で議論できていない石鹼ボートの動きを予想できるようにしたい。また、界面張力のグラフから石鹼ボートの動きが予想できることがわかったので、逆に小片の動きから界面張力を予想できるようにして、新たな界面張力測定法を考案したい。

謝辞

本研究を進めるにあたり、ご指導をいただいた横浜国立大学教員の大矢勝教授、データ及び試薬の提供をいただいた花王株式会社ケミカル事業ユニット開発部の佐多晋様に感謝いたします。

参考文献

<http://acbio2.acbio.u-fukui.ac.jp/phychem/maeda/kougi/ExpIV/surface2010.pdf> 実験 1

藤本武彦：『界面活性剤入門』（三洋化成工業株式会社、2007）

なぜ飴は溶けてベタベタになってしまうのか

The reason why candies melt and become sticky

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

大木 あかり

目的

飴がどのような条件で溶けやすく、またどうすれば溶けにくくなるのかを調べることである。

始めに、飴の溶けやすい条件について実験を行った。

実験Ⅰ

研究方法

- ① 三脚に水の入ったビーカーを乗せ、中に袋ごと飴を沈める。
- ② ビーカーをガスバーナーで火にかける。
- ③ 温度計で計りながら水の温度一定に保ち、5 分後に飴を取り出して、溶けているかどうか確認する。
- ④ ①～③を 50℃、60℃、70℃…と 10℃刻みで行う。

実験Ⅱ

研究方法

- ① シャーレに硫酸 10ml を入れた小容器と重さを量った飴を入れて、蓋を閉める。そのシャーレを一定温度に設定したインキュベーターの中で放置する。
- ② この操作を硫酸の濃度が 0%，10%，20%，30%，40%，50% の 6 種類で行う。
なお、この時硫酸の濃度が低いほど、水溶液の水の割合が多くなるため、シャーレ内の湿度は高くなる。
- ③ 4 日後、シャーレを取り出して溶けだした分の飴を布で拭き取り、残った飴の重さを計測して、そこから溶けた飴の量を計算する。
- ④ ①～③をインキュベーターの温度を 20℃、30℃、40℃、50℃にして計 4 回行う。

※今回の実験Ⅰ、実験Ⅱでは市販のべっ甲飴を使用した。

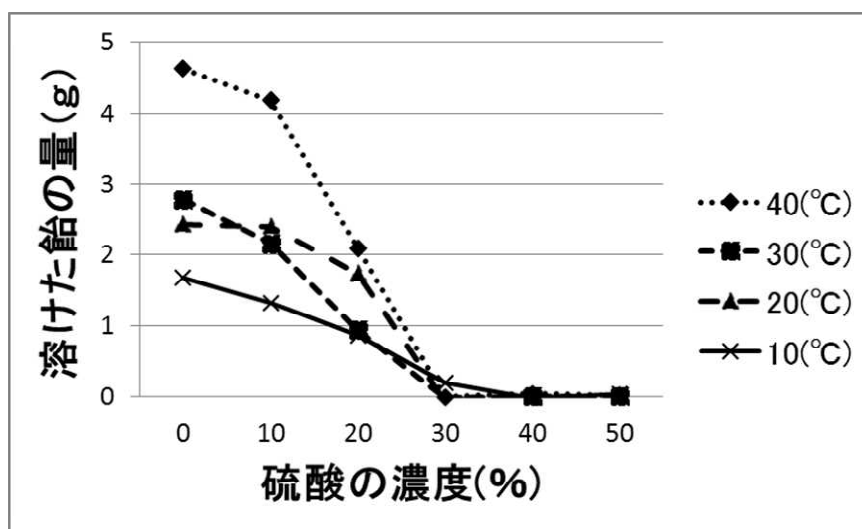
結果

実験Ⅰ

50℃～70℃まで袋の中の飴は溶けなかったが、80℃で加熱した時は飴が中から全体的に溶けた。

実験Ⅱ

どの温度も硫酸の濃度が 30% よりも低いものが多く溶けていた。



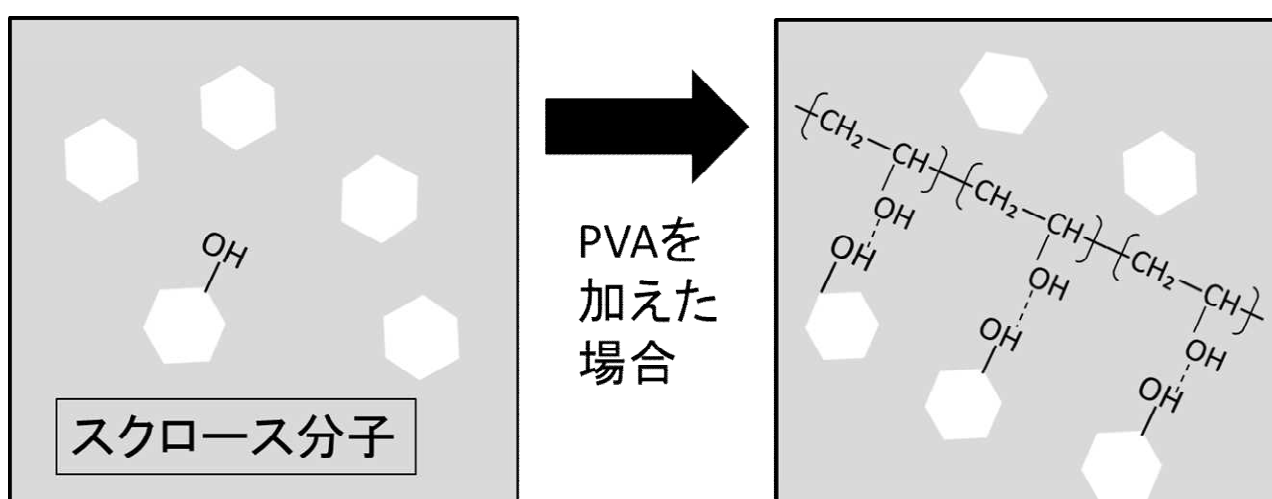
考察

二つの実験から、温度よりも湿度の方が受ける影響が大きいと考えられる。

また、どの温度でも硫酸の濃度が 30% になっている時が丁度境目になっているのは、その境目で硫酸の蒸気圧と飴の蒸気圧がつりあい、それよりも硫酸の濃度が薄くなった場合、飴の水蒸気圧よりも硫酸に入っている水の水蒸気圧の方が大きくなり飴に水蒸気がついてしまうため、そこから飴が溶けてしまうのではないかと考えた。

次に、飴がどうしたら溶けにくくなるかを探るため、飴の水溶液的物性から、添加物(ポリビニルアルコール(PVA))を加える実験を行った。

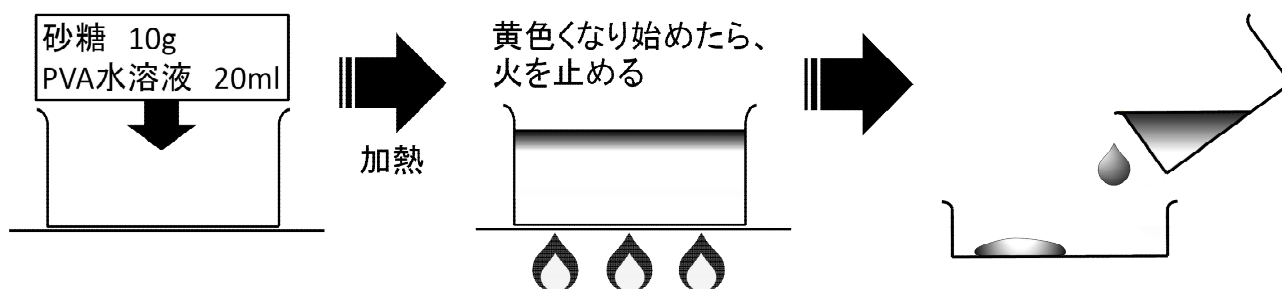
これは、飴の主成分であるスクロース($C_{12}H_{22}O_{11}$)の OH の部分と、PVA のもつ OH がくっつくことによって、スクロール分子が固定され飴が溶けにくくなるのではないかと考えたからである。



実験Ⅲ

研究方法

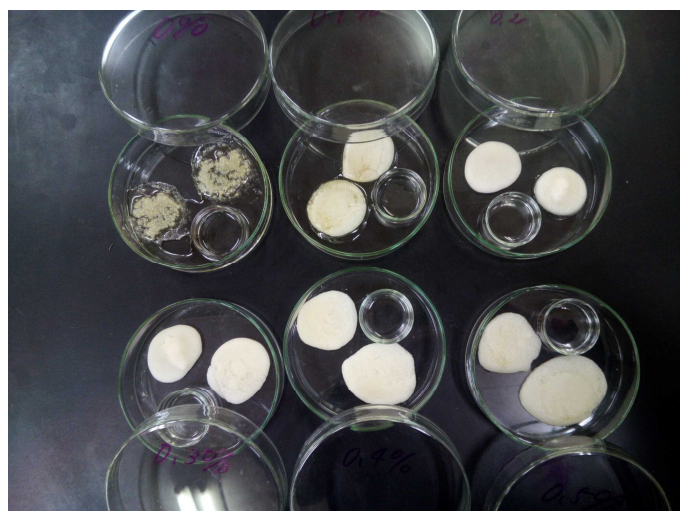
- ① 三脚の上に載せた蒸発皿の中に、砂糖 20 g とポリビニルアルコール (PVA) 水溶液 10mL を入れる。
今回は PVA 重合度 500 を使用する。
これは、事前の実験で PVA 重合度が 500~2000 で同じ実験を行ったところ、重合度 500 のものが一番飴が結晶化して溶けにくくなったからである。
- ② ガスバーナーで蒸発皿を加熱する。この時、放射温度計で温度を測りながら行う。
- ③ 砂糖がべっ甲飴になる 165℃を目安にして、砂糖の色が黄色くなり始めたら火を止める。
- ④ 固まらないうちにシャーレの中に液体を垂らして蓋をし、飴が冷えて固まったら質量を計測する。
- ⑤ ①~④を PVA 水溶液が 0%、0.1%、0.2%、0.3%、0.4%、0.5%の濃度で行い、飴と一緒に純水 10mL の入った小容器を入れて、計 6 個シャーレを作る。
- ⑥ 全てのシャーレを 30℃に設定したインキュベーターの中で 5 日間放置する。
- ⑦ インキュベーターから取り出し、溶けた分の飴を布でふき取ってから残った飴の重さを計測する。



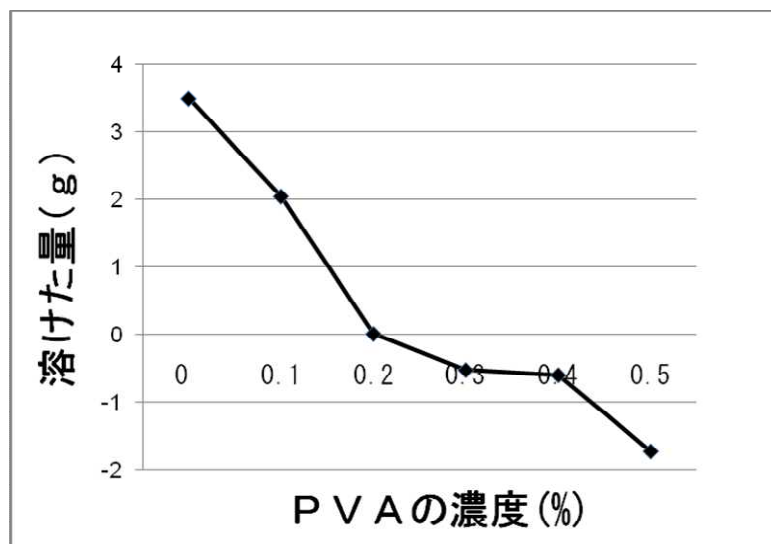
結果

PVAの濃度が 0.1、0.2%の時は溶けた(ただし、実験Ⅱの 30℃・硫酸濃度 0%の場合と比べて、飴の溶けた量は遥かに少なかった)。

また、0.3%以上の時は、飴は全体的に白くなり結晶化が起こり、飴は溶けなかった。



0%,0.1%,0.2%
0.3%,0.4%,0.5% の順番



考察

PVAの濃度が高くなると、飴は溶けずに結晶化された飴の量が多かったことから、仮説通り、飴のスクロース分子が固定され、溶けにくくなったと考える。

しかし、0.3%以降になると飴が溶けなかった。このことから、0.2%~0.3%間にあると思われる境目を通り過ぎると、十分結晶化したと考えられる。

結論

3つの実験から、飴が溶ける量は、温度よりも湿度の方が影響を受けやすい。また、添加物(今回の場合はPVA)を加えることにより、飴の結晶化を促進し、溶けるのを防ぐことができる。

今後の課題

- ・PVAの他にも飴を結晶化させることのできる物質があるかどうか調べ、それぞれどのくらい結化するのかを比較する。
- ・添加物以外で溶けにくくできる方法はないか。

金属イオンを最も吸着するアルギン酸ゲルの作製

Preparation Method of Alginate Gel that can Efficiently Absorb Metal Ion

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

大森 千夏

はじめに

アルギン酸ナトリウム水溶液にカルシウムイオンを加えて作ったアルギン酸ゲルは、金属イオンを吸着する性質を持つ。このことを河川の浄化に生かせるのではないかと考えた。

目的

金属イオンの吸着量を上げる条件について研究する。

実験 1 では使用するアルギン酸ナトリウム水溶液と塩化カルシウム水溶液 (CaCl_2) の最適濃度を求めた。

実験 2、3 では Na^+ を持つゲルと持たないゲルの二種類のゲルを用いて銅イオンの吸着量の差を求めた。

方法

実験 1

用いるアルギン酸ナトリウム水溶液、および CaCl_2 水溶液の濃度を变化させた。

- ① 10 mL のアルギン酸ナトリウム水溶液を、分液漏斗を用いて 100 mL の CaCl_2 水溶液に滴下しゲルを作製した。
- ② 作製したゲルをすぐに取り出した。
- ③ $1.0 \times 10^{-2} \text{ mol/L}$ 塩化銅(Ⅱ) (CuCl_2) 水溶液 10 mL にゲルをすべて入れた。
- ④ 10 時間 30 分 暗所で静置した。
- ⑤ CuCl_2 の反応液を 5 mL 取り出し、6 mol/L アンモニア水 1 mL を加えて、607 nm の吸光度を測定した。
- ⑥ 検量線を用いて、測定した吸光度から濃度を求めた。

実験は各 3 回行い、平均を求めた。

ただし、アルギン酸ナトリウム水溶液の濃度と CaCl_2 水溶液の濃度は以下のように定めた。

実験 1-① 濃度 0.5、1.0、1.5、2.0% のアルギン酸ナトリウム水溶液を用いてゲルを作製する。

(CaCl_2 水溶液は 2.0 mol/L)

実験 1-② 濃度 0.5、1.0、2.0、3.0、3.6 mol/L の CaCl_2 水溶液を用いてゲルを作製する。

(アルギン酸ナトリウム水溶液は 2.0%)

実験 2

内部にアルギン酸ナトリウム水溶液を持つゲルと持たないゲルの二種類のゲルを作製し実験した。

アルギン酸ナトリウム水溶液を CaCl_2 水溶液に滴下した後、

→すぐに CaCl_2 水溶液から取り出したものをゲル A (実験 1 と同じもの)

→ CaCl_2 水溶液に 8 時間漬けて置いたものをゲル B とする。

ゲル A は内部にアルギン酸ナトリウム水溶液が残っている
で、 Na^+ を持っている。

反対にゲル B は内部までアルギン酸カルシウムゲルになっている
ので、 Na^+ を持っていない。

この二種類のゲルを用いて、実験 1 と同じ手順で実験した。

ただし、以下の点は実験 1 と異なる。

- ・アルギン酸ナトリウム水溶液の濃度 2%
- ・ CaCl_2 水溶液濃度 0.5 mol/L
- ・反応時間 1 時間

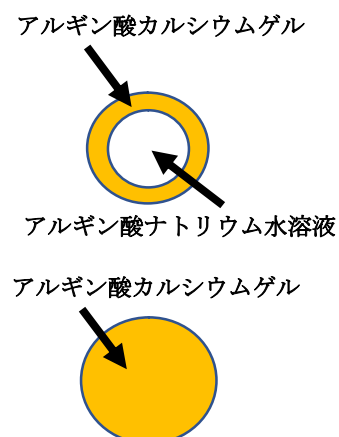


図 1 ゲル A(上) ゲル B(下)

実験 3

- ① 実験 2 と同じ方法でゲル A、ゲル B をそれぞれ作製した。
- ② 10×10^{-2} mol/L の CuCl_2 水溶液 17.5 mL 中にゲルを 56 粒入れた。
- ③ 15、30、60、120、180、240 分ごとに、 CuCl_2 水溶液を 2.5 mL、ゲルを 8 粒取り出した。
- ④ 6 mol/L アンモニア水 1 mL を加えて、607 nm の吸光度を測定した。
- ⑤ 検量線を用いて、測定した吸光度から濃度を求めた。

実験は各 3 回行い、平均を求めた。

結果

実験 1 の結果

実験 1 の結果を図 2 に示す。

縦軸は残った塩化銅水溶液の濃度を表しているの、濃度が低いほど吸着が良いことを示している。

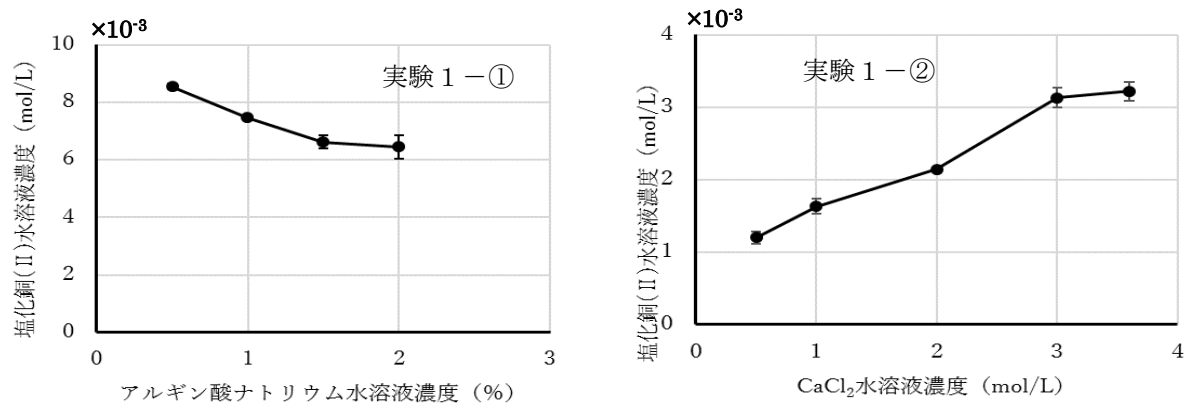


図 2 溶液濃度と Cu^{2+} の吸着量

アルギン酸ナトリウム水溶液は高濃度になるほど、 CaCl_2 水溶液は低濃度になるほど吸着量は増加することが分かった。

実験 2 の結果

実験 2 の結果を図 3 に示す。

1 時間で CuCl_2 水溶液の濃度が 1.0×10^{-2} mol/L から、ゲル A は 5.08×10^{-3} mol/L に、ゲル B は 6.96×10^{-3} mol/L に減少した。

実験 3 の結果

実験 3 の結果を図 4 に示す。

ゲル A、ゲル B ともに 120 分までは時間を追うごとに CuCl_2 水溶液の濃度が減少し、その後は緩やかに減少するようになった。

全ての時間において、ゲル A の吸着量はゲル B を上回った。

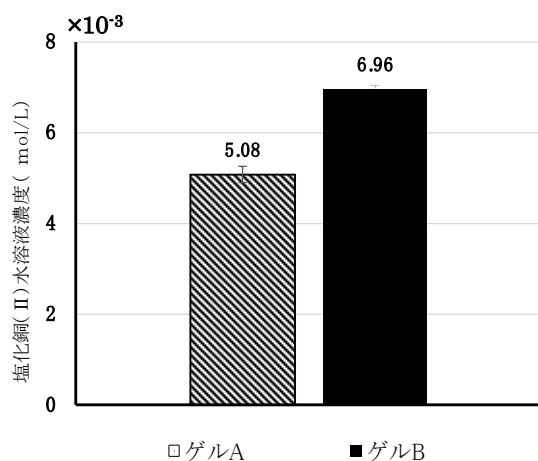


図 3 ゲル A ゲル B の Cu^{2+} の吸着量の差

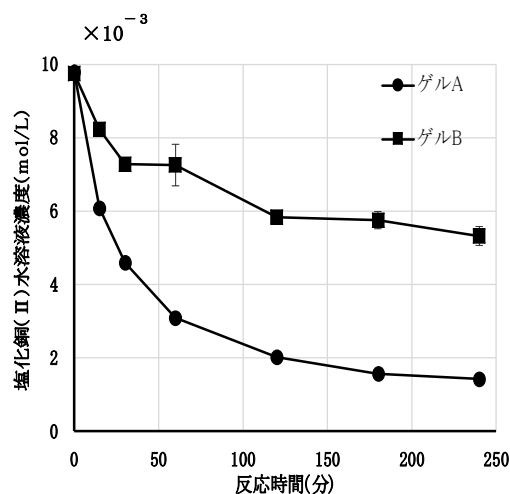


図 4 ゲル A ゲル B の Cu^{2+} の吸着の経時変化

考察

実験 1-①

使用したアルギン酸ナトリウム水溶液の濃度が高い場合、ゲル内部のアルギン酸ナトリウムの濃度が高くなる。そのため、高濃度のアルギン酸ナトリウム水溶液を用いて作製したゲルほど、 Na^+ の量が多くなる。 Na^+ は Cu^{2+} と置換するので吸着量が増えたと思われる。

実験 1-②

これまでの実験から、 CaCl_2 水溶液の濃度が高いほどゲルが厚くなることが観察できた。

このことから、 CaCl_2 水溶液の濃度が低い方が膜が薄くなるので Cu^{2+} がゲルを通りやすく、またゲル内部に存在するアルギン酸ナトリウムの量が多くなるので吸着量が増えたと思われる。

以上から、 Na^+ が多く存在する条件の時に吸着量が増加するのではないかと考えた。

実験 2・3

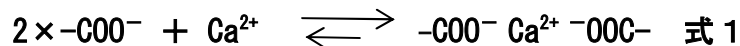
Na^+ を持っているゲル A の方が、 Na^+ を持っていないゲル B よりも多くの Cu^{2+} を吸着した。

このことから、 Na^+ が多く存在する条件の時に吸着量が増加するのではないかと考えられる。

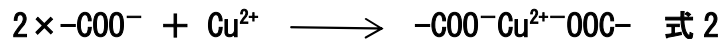
また当初は、ゲルが持つ Na^+ 及び Ca^{2+} はほぼ全て Cu^{2+} と置換するため、時間を追うほどゲル A とゲル B の塩化銅(II)の濃度の差は縮まるのではないかと考えたが、結果として差は縮まらなかった。

アルギン酸ゲル内において、アルギン酸ナトリウム水溶液は、カルボン酸陰イオンと Na^+ が電離した状態を取っていると考えられる。一方、アルギン酸カルシウムゲルは、カルボン酸陰イオンと Ca^{2+} が電離した状態と、カルボン酸陰イオンと Ca^+ が接近している状態が平衡に達していると考えられる(式 1)。また、 Ca^{2+} においては、 Ca^{2+} 一つがカルボン酸陰イオン二つを結びつける形になる。

この平衡状態を式で表すと以下のようにになると考えられる。アルギン酸カルシウムゲルは一度ゲルになると長時間ゲルの状態を保つので、式 1 のように偏ると考えられる。



Cu^{2+} の吸着も Cu^{2+} 一つがカルボン酸陰イオン二つを結びつける形をとることによって起きる（式2）。



アルギン酸ナトリウムは $-\text{COO}^-\text{Na}^+$ という構造を持つ。このアルギン酸ナトリウムを水に溶かすと $-\text{COO}^- + \text{Na}^+$ に電離する。ここに Ca^{2+} を加えると Ca^{2+} 一分子とカルボン酸陰イオン二分子が結びついてゲルができる。そのためには、カルボン酸陰イオンが多く存在する必要がある。

Cu^{2+} の吸着は、アルギン酸ナトリウム及びアルギン酸カルシウムがどれだけカルボン酸陰イオンを放出するかに影響する。より Cu^{2+} を多く吸着するには、カルボン酸陰イオンが多く存在する必要がある。

ゲルAは内部のアルギン酸水溶液がカルボン酸陰イオンを多く持っているので、より多くの Cu^{2+} を吸着した。

一方で、ゲルBは式1のようにカルボン酸陰イオンの量が少ないので、 Cu^{2+} の吸着量が少なかったと考えられた。

結論

これまでの実験から、 Cu^{2+} の吸着量上げるには、アルギン酸ナトリウム水溶液の濃度は高いほど、 CaCl_2 水溶液濃度は低いほど、また内部にアルギン酸ナトリウム水溶液を残してゲルを作製するのが良いと結論する。

今後の課題

アルギン酸ナトリウム水溶液の液性を変化させたことによる Cu^{2+} の吸着量の変化を調べる。

参考文献

株式会社キミカ「アルギン酸とは」 <http://www.kimica.jp/alginate/>（2017年5月30日）

感想

今回の課題研究を通して、実験条件をきちんとそろえることの重要性を知った。一方で、私はゲルをより定量的に作ろうと本筋の金属イオンの吸着から離れ、ゲルの作製方法に時間をかけてしまい研究が進まなかった時期があった。課題研究という限られた時間の中で、こだわるべき点と妥協すべき点を見極め、計画的に研究を進めていくべきだと感じた。

炭の作成条件や金属イオン添加による導電性の向上方法

Improvement of Electrical Conductivity of Charcoal in variation of Heating Temperature and Addition of Metal Ions

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

柿澤 昂志

目的

近年、世界的に金属資源の枯渇が危惧されている。私は様々な工業製品において導電材として使用されている黒鉛に着目し、身近な木炭も金属の代替となるのではないかと考えた。本研究では木炭の導電性を向上させるための方法を検討する。

実験 1. 木炭の作成条件に関する実験

方法

(1) 木炭の作成方法

管状電気炉を用いて窒素中で加熱温度を 400℃から 1200℃において 200℃ごとに変化させ木炭を作成した。

(2) 作成した木炭の測定

(1)の方法で作成した木炭を以下の 3 点を測定した。

- ①四端子法を用いた木炭の 1 cm の電気抵抗値
- ②炭化前後の物質の質量変化
- ③炭化前後の物質の体積変化

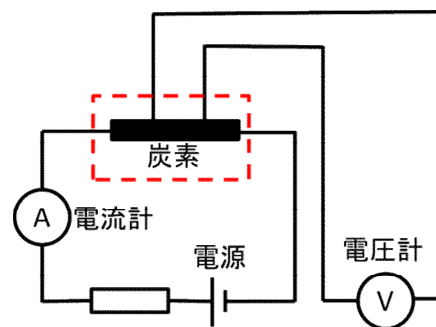


図 1 四端子法の回路図

(3) 電気抵抗値の測定法

ごく小さい電気抵抗値 ($1.0 \Omega/\text{cm}$ 以下)を測定するため、四端子法という図 1 の測定方法を用いて電気抵抗値を測定した。四端子法とは電流と電圧をそれぞれ分離して測定し、オームの法則より抵抗値を算出する方法である。

結果

図 2 ように、電気抵抗値は加熱温度が高くなるにつれ小さくなり約 1000℃以上になると約 1.0Ω で一定となった。質量・体積ともに加熱温度が高くなると減少し、約 1000℃で変化しなくなる。約 30 分以上加熱すると電気抵抗値、質量、体積は一定となったため、以降の実験では 30 分加熱した木炭を使用した。

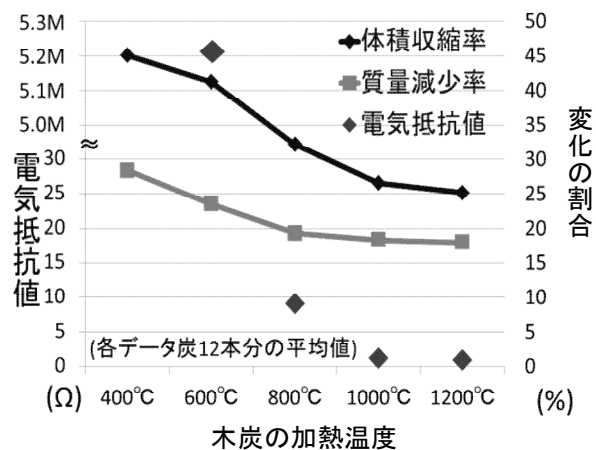


図 2 加熱温度と炭の状態との関係

考察

加熱温度を高くすると、木炭中に点在していた非結晶炭素が、少しずつ近くの炭素と小さな黒鉛の微細な粒子を形成すると考えた。その結果、導体である黒鉛の密度が少しずつ高くなるため、それに伴い電気木炭全体の抵抗値が低下したのではないか。

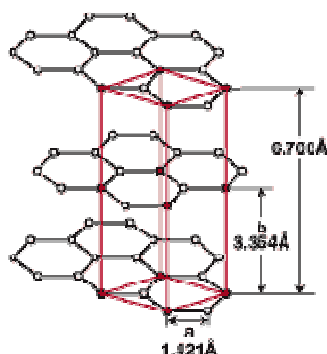


図4 黒鉛の構造

ただし、木炭は固体であるため、内部の非結晶炭素が完全に自由に動いて黒鉛に変化できるというわけではない。そのため木材を高温で加熱するだけでは木炭全体を黒鉛化させることは不可能であり、先述の考察のように隣接した炭素同士が結合し微細な黒鉛粒子を形成するにとどまったと考えられる。

実際に実用化されている人造黒鉛の製造方法は、融点が高いコークスを使用している。コークスは液相化した炭素が自由に移動でき黒鉛化しやすいという特徴がある。今回使用したセルロースの融点は約 6000℃といわれており、使用した実験機材では炭素が自由に移動できる液相にすることは困難であった。

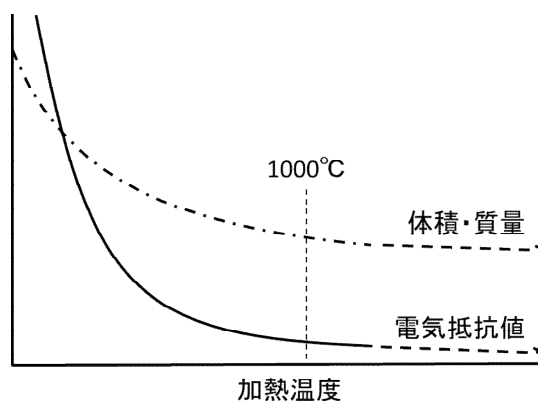


図3 加熱温度と炭の状態との予想

仮説

以上の考察から、ただ単に木材を加熱するだけでは、これ以上の電気抵抗値の低下は望めない。しかし木炭を完全に黒鉛化できなくとも、電気抵抗値を低下させるには『木炭中の黒鉛量を増やせばよい』ということである。よって木炭の表面に黒鉛化を促進させる触媒のような物質を吸着させることで、比較的低い加熱温度でも黒鉛量を増やし、電気抵抗値を低下させられるのではないかと考えた。以降の実験では、先行研究を参考に金属イオンを木炭表面に吸着させ木炭の導電性向上を試みた。

実験 2. 木炭表面に金属イオンを吸着させた場合の導電性向上の実験

実験内容

(1) 先行研究

先行研究によると、400～500℃の加熱で生成した炭素材は活性炭のような性質を持つといわれている。活性炭の性質の一つとして、水溶液などに浸すと溶媒中のイオンや微粒子などを吸着することが挙げられる。金属イオンなどの荷電物質は、活性炭界面の水酸基やカルボキシル基等の官能基による化学的な引力によって吸着され、ほかの微細な粒子は活性炭表面の非常に微細な気孔で発生する表面張力の物理的引力によって引き寄せられる。

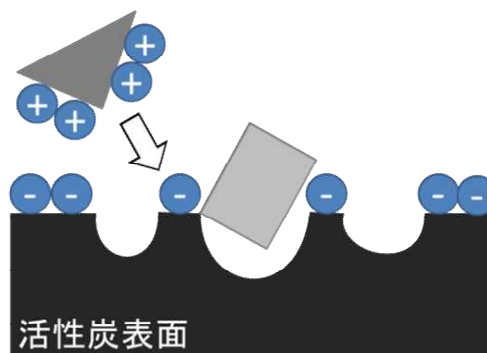


図5 活性炭表面の物質吸着の様子

また金属イオンを吸着させた後に、その木炭を高温で加熱すると、金属イオンが触媒の働きをしてその周辺の非結晶炭素の黒鉛化を促進し導電性が向上する事が知られている。

(2) 実験方法

本実験では金属イオンの導電性向上の効果を調べるため、400℃で生成した木炭を濃度の異なる以下の水溶液に 24 時間浸し、その後 1000℃で再加熱して電気抵抗値を測定した。溶質は陽イオンの価数の異なる塩化物を使用した。

表 1 実験で使った金属イオン

溶質	陽イオン	価数	周期	化合物
NaCl	Na ⁺	1 価	3	Cl ⁻
MgCl ₂	Mg ²⁺	2 価		
AlCl ₃	Al ³⁺	3 価		

結果

図 6 のように溶質の濃度が大きくなるにつれて総じて電気抵抗値も低下した。しかしこの結果からはこの実験の変数である価数と電気抵抗値との間に直接的な関係は見いだせなかった。また水溶液濃度が小さすぎると無処理の木炭の電気抵抗値よりも大きくなるという結果になってしまった。

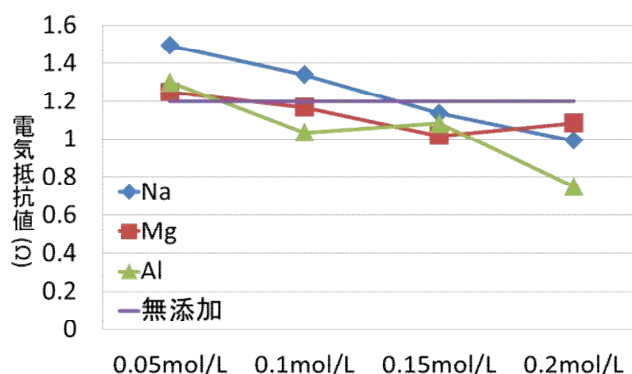


図 6 金属イオン濃度と電気抵抗値との関係

考察

以上の結果から、金属イオンの濃度が大きくなるにつれて、導電性も向上していることが分かった。今回使用した金属イオンには、どれも電気抵抗値を低下させる効果、すなわち黒鉛化を促進する触媒としての能力があると考えられる。

金属イオンが黒鉛化を促進する原理を完全には解明できなかったが、先行研究を参考に考察する。金属イオンが吸着された後に高いエネルギーを与えると、金属イオンが触媒としての役割を果たし、僅かながら何もない時よりイオン周辺の炭素が移動できるようになる。加熱温度を下げていくにつれて、供給熱エネルギーが小さくなるため、炭素が移動しにくくなると思われる。このとき、炭素はできるだけエネルギーが小さくて済む状態に安定しようとするだろう考えた。この安定した状態こそが黒鉛構造であるのではないかな。

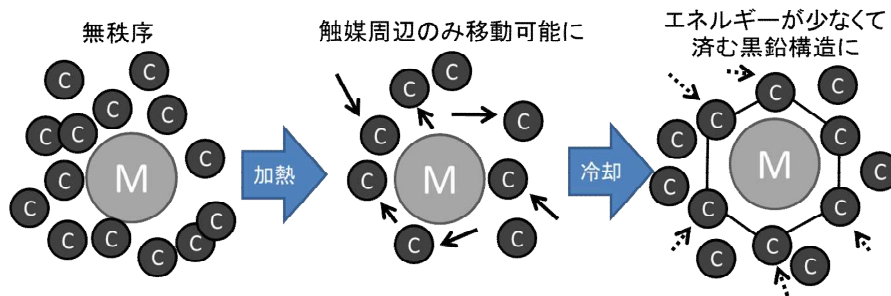


図 7 金属イオン周辺の炭素の動き

この考えだと、確かにイオンが届く範囲では黒鉛の量は増える。だがしかし黒鉛化されることができるのは金属イオンが到達する表面だけである。そのため木炭全体の黒鉛化は望めず根本的な解決とはなっていない。

表 2 黒鉛と作成した木炭の電気抵抗値

実際、黒鉛の電気抵抗値には大きな差がある。表面の黒鉛化が促進できても木炭全体の黒鉛化はほとんど進んでいないと考えられる。

	抵抗値 (Ω/cm)
黒鉛	0.0014
Na^+ 添加	0.99
Mg^{2+} 添加	1.08
Al^{3+} 添加	1.12

この問題を解決するための簡単な方法として、イオンを吸着させる木炭を粉末にする方法を考えた。粉末にして表面積を増やすことで金属イオンと接触できる範囲を増やすことで、黒鉛化される範囲も増えるのではないかと。今後、粉末炭への吸着方法を検討したい。

さらに少々本研究自体のテーマから逸脱するかもしれないが、この実験から考えられることを用いると、次のようなことも考えられるのではないだろうか。金属イオンが触媒のような効果を果たするのであれば、物理的もしくは化学的なアプローチでイオンを規則的に配列できれば、その周りに炭素を配置したのち、加熱・冷却によって比較的低温でも周りに黒鉛が生成されるはずである。金属イオンが触媒としてだけでなく、黒鉛の鋳型としての使用方法もあるかもしれない。

結論

- (1) 加熱温度を高くすると、電気抵抗値は低下し約 1000℃以上でほとんど一定となる。
- (2) 電気抵抗値が低下するのは、セルロースの炭素が、高温下で一部黒鉛化するためと考えられる。
- (3) 単に高温で加熱しても、木炭が固体のため炭素原子が移動できず、完全に黒鉛化できないため導電性は黒鉛に及ばないと考えられる。
- (4) 低温で作成した木炭に、金属イオンを添加し高温で再加熱することで、無処理で加熱した木炭に比べ電気抵抗値を低下させることができる。
- (5) 金属イオンが活性炭に吸着されたとき、金属イオンが触媒となり無処理に比べて低い温度でも黒鉛化を促進できると考えられる。

今後の展望

どの実験でも電気抵抗値が低下すると木炭内部の黒鉛の量が増える、と予想したが実際に黒鉛の量を計量できたわけではない。今後の実験の発展のためにこの木炭の黒鉛の含有量を簡単に計量できる測定方法を開発したい。これからの時代、確実に活躍の場が広がるであろう炭素材への理解を、今後さらに深めていけたらと思う。

EPDMの劣化と次亜塩素酸ナトリウム水溶液の温度・pHとの関係

The relationship between deterioration of EPDM and the temperature・pH of NaClO aq

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

小林 純也 荻米 洗亮

はじめに

近年、残留塩素（水道水消毒のために利用される次亜塩素酸ナトリウムなどの塩素剤が、効力を残して水道水中に存在しているもの。水道法により一定量の残留塩素が確保されなければならない）が水道配管部品や水関連機器として使われるエチレンプロピレンジエンゴム（EPDM）を劣化させ水中に EPDM が溶け出すなどの被害が出ている。

目的

この劣化の対策を考えるために、EPDM の劣化がどのように進行しているか調べる。予備実験で次亜塩素酸ナトリウムの濃度が高いほど劣化が激しいことがわかっている。pH を変えると次亜塩素酸ナトリウム水溶液中の次亜塩素酸イオン(ClO^-)と次亜塩素酸(HClO)の比が変化するため酸化力の違いを利用して劣化を防げるのではないかと思い、今回は温度と pH を変えて研究した。

方法

5%の次亜塩素酸ナトリウム水溶液を 10 倍希釈し、そこに少量の塩酸を加え pH を 7～11 に調節する。（pH6 以下では塩素ガスが発生し危険なため今回は行っていない。） $2 \times 2 \times 0.5$ (cm)の EPDM を 10mL の次亜塩素酸ナトリウム水溶液を入れた容器に全体が浸るように入れて 1 週間インキュベータで温度を一定にして保存する。今回は温度を 25℃と 45℃に分けて実験した。1 週間後 EPDM を取り出し、綿棒で表面をこすり取る。この際、型のようなものを使いこする面積を一定にする。こする前後で綿棒の質量を量り、析出した粉の量を求める。

今回の実験では粉が析出すれば劣化したとみなす。また、今回の実験では短い期間での実験であるため次亜塩素酸ナトリウム溶液の濃度は水道水よりはるかに高い。

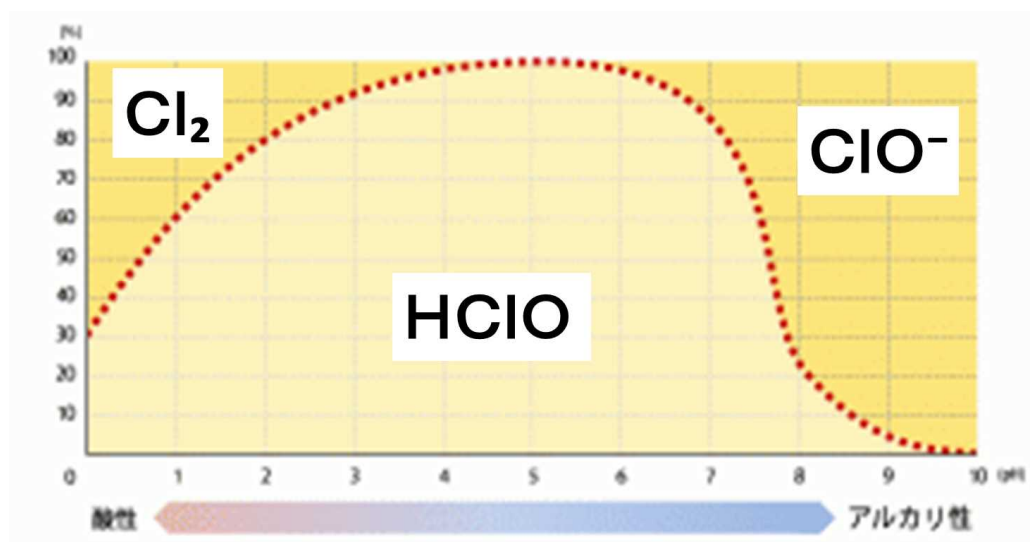


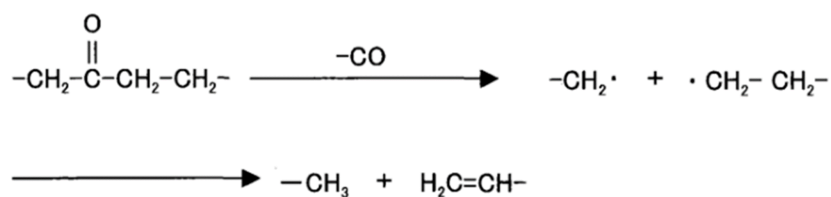
左図はこする際に面積一定にするため使用した型、右図はこすったあと付着した粉

$$\begin{array}{c} \text{---(CH}_2\text{---CH}_2\text{)---(CH}_2\text{---CH)---(X)---} \\ | \\ \text{CH}_3 \end{array} \quad \text{X の例) } \text{---CH}_2\text{---CH=CH---CH}_2\text{---}$$

使用例) 水道配管の部品、水周りのパッキン、自動車の部品、など

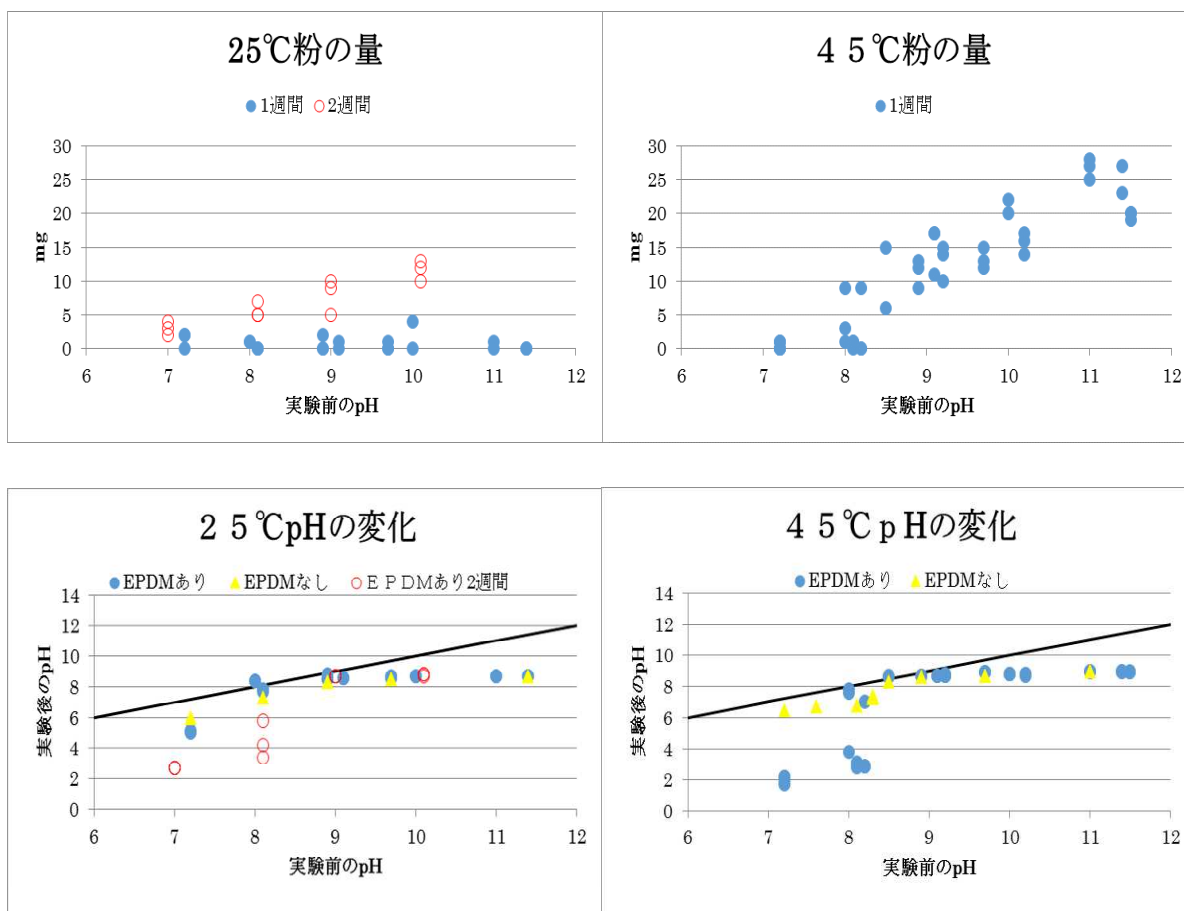
- ・水溶液はアルカリ性を示す。 $\text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{HClO} + \text{OH}^-$
- ・高温や紫外線等で分解が促進される。 $2\text{HClO} \rightarrow 2\text{HCl} + \text{O}_2 \uparrow$
- ・酸化作用、漂白作用、殺菌作用があるため水道水等の消毒剤として使用されている。
 $\text{NaClO} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{NaOH} + \text{HClO}$
 $\text{HClO} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{ClO}^-$


$$\begin{array}{lcl}
 \text{EPDM-CH}_2\cdot & \longrightarrow & \text{EPDM-}\dot{\text{C}}\text{H-} + \text{H}\cdot \\
 \text{EPDM-}\dot{\text{C}}\text{H-} + \text{O}_2 & \longrightarrow & \text{EPDM-CH-} \\
 & & | \\
 & & \text{OO}\cdot \\
 \text{EPDM-CH-} + \text{EPDM-CH}_2\cdot \\
 | \\
 \text{OO}\cdot \\
 \longrightarrow & \longrightarrow & \text{EPDM-CH-} + \text{EPDM-CH-} \\
 & & | \qquad \qquad | \\
 & & \text{OOH} \qquad \text{OOH} \\
 \text{EPDM-CH-} & \longrightarrow & \text{EPDM-CH-} + \cdot\text{OH} \\
 | \\
 \text{OOH} \\
 & & | \\
 & & \text{O}\cdot \\
 & \longrightarrow & \text{EPDM-C-} + \text{H}_2\text{O} \\
 & & || \\
 & & \text{O}
 \end{array}$$



結果

- ・ 25℃ではほとんど劣化は見られなかったが、45℃でははっきり劣化が確認でき、析出した粉の量も45℃の方が多かった。
- ・ 25℃、45℃ともに pH が高いほど劣化した。
- ・ 25℃で期間を延ばして 2 週間浸けたところ析出した粉の量、実験後の pH とともに 45℃のときと同じ傾向が見られた。
- ・ EPDM なし 45℃の実験で、pH8 以上の水溶液は全て実験後 pH9 前後になった。さらに pH8 以下では pH は少し下がった。EPDM ありで実験すると、pH8 以上の実験後の pH は EPDM なしのときとほぼ同じ結果になった。pH8 以下のときは、実験後の pH は 3 前後になった。
- ・ EPDM あり 45℃のとき気泡が発生し、pH が低いほど気体の量が多かった。
- ・ 水酸化ナトリウム水溶液に 1 週間浸けても変化はみられなかった。



上図の線は直線 $y=x$ であり、その線に点が近いほど実験前後で変化が少ないことを示している

考察

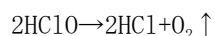
25℃より 45℃の方が析出した粉の量が多く、25℃で二週間行った実験では 45℃の時と同じ傾向が見られたことから温度が高いほど反応が促進され、劣化が激しくなると考えられる。

25℃の実験で、1 週間より 2 週間の方が析出した粉の量が多いため、次亜塩素酸ナトリウムにさらされる時間が長いほど劣化が進行すると考えられる。

水酸化ナトリウムだけで実験しても変化がないことから OH⁻によって劣化は起こらないと考えられる。

<pH が 8 以下の（水溶液中の HClO の割合が多い）とき>

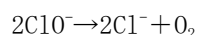
次のような反応が起きたと考えられる。



気体が発生し、劣化がほとんど起きなかったこと、pH が下がったこと、EPDM には塩素を引き付ける性質があり、EPDM の周囲の HClO の濃度が高くなることからこの反応が起きたと考えた。

<pH が 8 以上の（水溶液中の ClO⁻の割合が多い）とき>

次のような反応が起きたと考えられる。



この反応で発生する酸素は EPDM の劣化に使われたと考えられる。

結論

- ・ 温度は低いほど劣化を遅らせられる。
- ・ 次亜塩素酸ナトリウムにさらされる時間が短いほど劣化が起きにくい。
- ・ pH は中性に近いほど劣化が起きにくい。
- ・ よって、現段階では水道水を前提とすると、温度の低い環境で EPDM を使用することが劣化対策として最も効果的である。

今後の課題

- ・ 温度を25℃と45℃の2通りしか実験できなかった為、温度をもっと変えて実験数を増やす。
- ・ 起きた反応を調べるのは今回の実験だけでは不十分だったので、考察の反応よりも複雑な反応が起きている可能性がある。
- ・ 実験により発生する気体を調べ、自然分解が実際に起きているか調べる。
- ・ 当初は表面の硬度を測定し、実験しようと考えたが正確に測ることができていなかったため、測定方法を工夫して硬度の変化からも劣化を示す。

参考文献

www.a-creo.co.jp/solution/sterilization/germicidal/

[http ; //hdl.handle.net/10069/24483](http://hdl.handle.net/10069/24483)

様々な化学物質の利用による酸化チタンの酸化能力の変化

Change in the oxidation capacity of titanium oxide by the use of various chemical substances

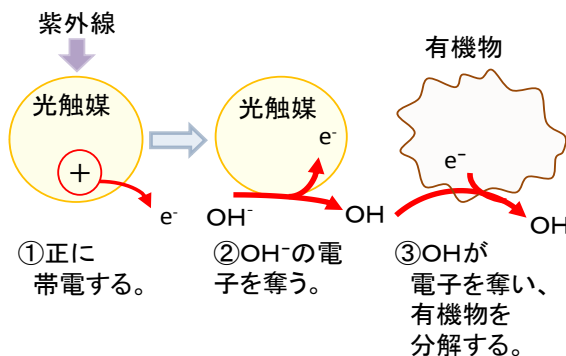
千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

丸山 衡平 岸田 実優

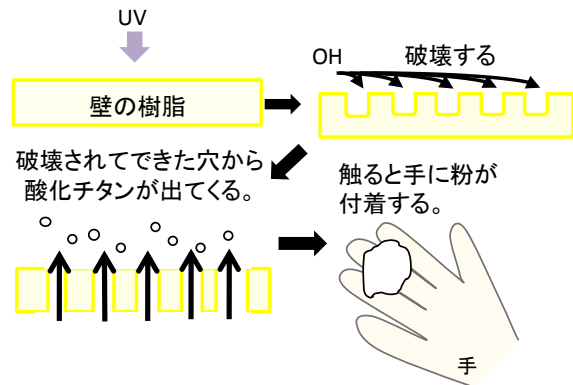
目的

チョーキング現象の抑制を最終目標とし、酸化チタンの酸化能力のコントロールを試みる。

《光触媒の原理(水中)》



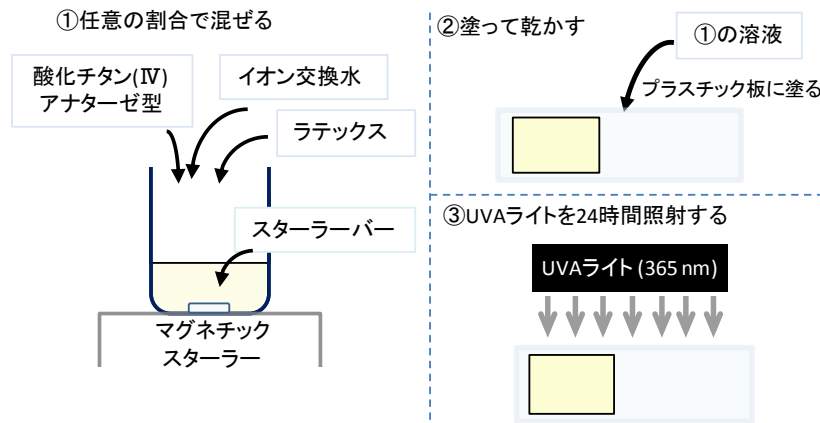
《チョーキング現象の原理》



《実験 1》現象が起こった度合いの比較をするためにチョーキング現象を起こすことを試みる。

仮説 酸化チタンの割合が大きい程、酸化能力が大きいために現象が起こりやすくなる。

研究方法



研究結果

	イオン交換水(mL)	ラテックス(mL)	酸化チタン(g)	結果
1	20	5.0	0.5	変化なし
2	20	5.0	1.0	変化なし
3	20	5.0	1.5	変化なし
4	20	5.0	2.0	変化なし
5	20	5.0	2.5	変化なし

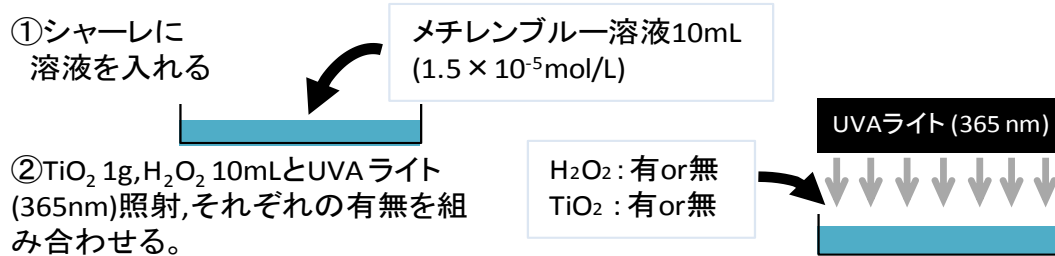
考察

この方法で、チョーキング現象を起こすことは現段階では不可能であると判断した。
そのため、チョーキング現象を起こすためには、多くの時間が必要である。

《実験 2-①》酸化チタンの酸化能力を向上させることを試みる。

仮説 酸化剤を共に用いることによって酸化能力が向上する。

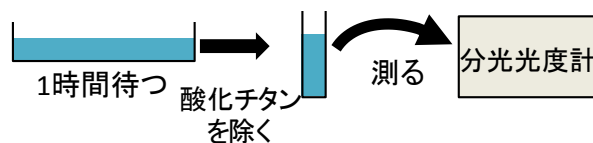
研究方法



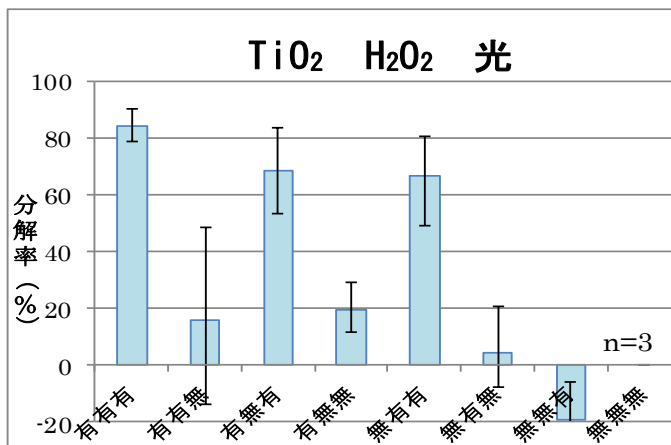
③1時間後に,分光光度計で酸化チタンを除いたメチレンブルー溶液の吸光度を測定する。

その後,酸化チタン,過酸化水素水,光を含まないもの(無無無)の溶液の吸光度を0としてそれぞれのメチレンブルー溶液の分解率を求める。

$100 - (\text{求める溶液の吸光度} / \text{無無無の吸光度}) \times 100$



研究結果



酸化チタン有, 過酸化水素水有, 光有のメチレンブルーの分解率が著しく高かった。

次いで, それぞれ有無有, 無有有の分解率が高かった。

考察

酸化チタンと過酸化水素水を共に用いることによって酸化能力が向上すると考えられる。無有有と有無有はほとんど酸化力が等しいという結果であったことから, 別々に反応が起こった可能性がある。そのため, 過酸化水素水が直接酸化チタンの酸化能力を向上させたとはこの方法では言えない。

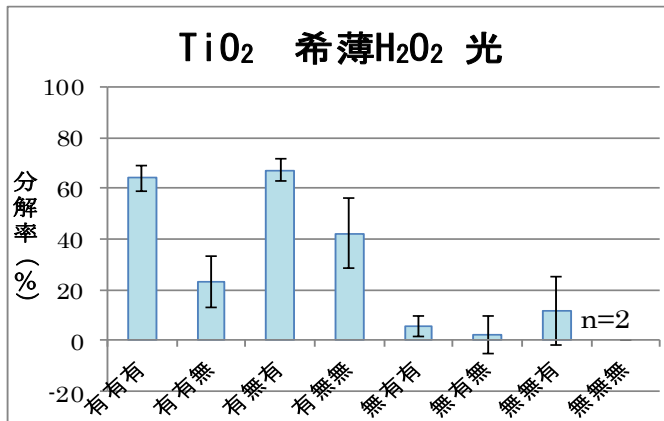
《実験 2-②》過酸化水素水の濃度を変えて, 酸化剤の効果が本当にあるかどうかを調べる。

仮説 分解率は低下するが, 酸化能力は向上する。

研究方法

過酸化水素水の濃度を $2.1 \times 10^{-3}\%$ に変えて、実験 2-①と同様の実験を行う。

研究結果



酸化チタン有，過酸化水素水無，光有のメチレンブルーの分解率が著しく高かった。

次いで，それぞれ有有有の分解率が高かった。

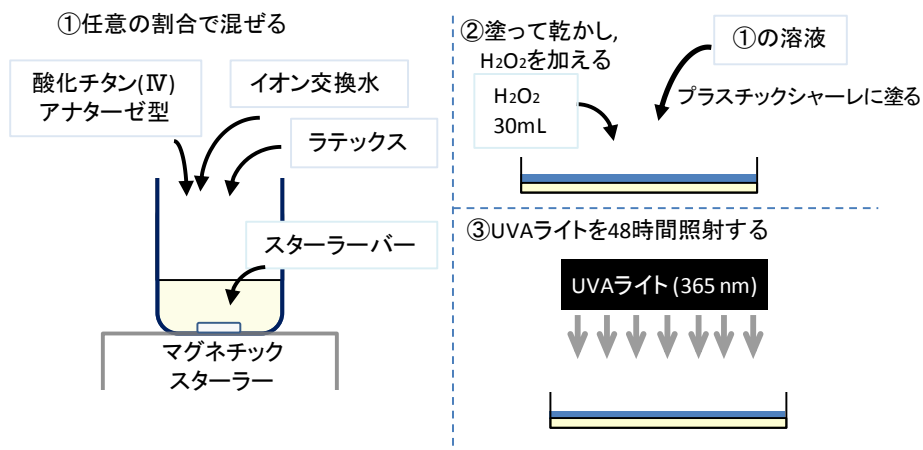
考察

今回の実験では，H₂O₂ の濃度が薄かったため、酸化剤として相互作用を引き起こすことが出来なかったと考えられる。その理由として、過酸化水素水の酸化力が酸化チタンの酸化力を大幅に下回ったからであると考えた。

《実験 3》 過酸化水素水を用いることで、チョーキング現象を起こすことを試みる。

研究方法

実験 1 と同様に溶液を作成し，プラスチックシャーレに塗った後，3%過酸化水素水 30mL を加え，そのまま UVA ライトを照射する。



研究結果

	イオン交換水(mL)	ラテックス(mL)	酸化チタン(g)	結果
1	20	5.0	0.5	変化なし
2	20	5.0	1.0	変化なし
3	20	5.0	1.5	変化なし
4	20	5.0	2.0	粉が発生した
5	20	5.0	2.5	変化なし

考察

酸化剤を加えることによってラテックスを劣化させることができた。このことから、ラテックスを用いてチョーキング現象が起きる可能性が0ではないことがわかった。しかし、それと同時に酸化チタンの酸化力だけでは短時間でラテックスを分解することが出来ないと言える。

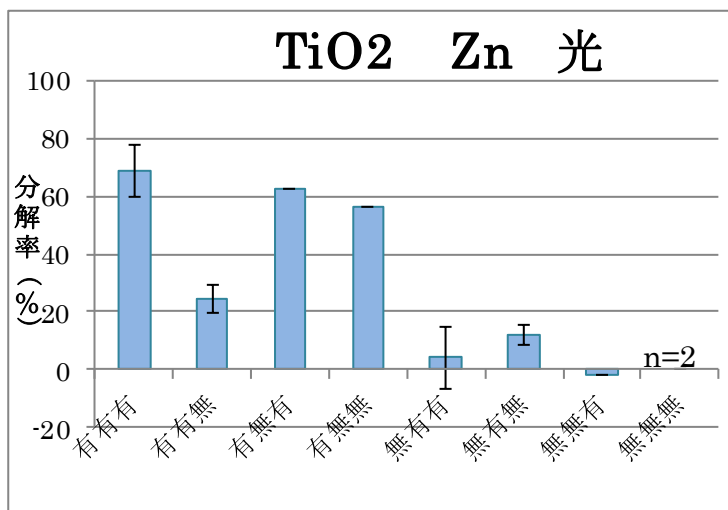
《実験 4》還元剤を共に用いることによって酸化能力を抑制することができるかどうか調べる。

仮説 酸化能力を抑制することができる。

研究方法

過酸化水素水 10mL の代わりに亜鉛板(1cm×1cm)4 枚を加えて、実験 2 と同様の実験を行う。

研究結果



酸化チタン有,過酸化水素水無, 光有のメチレンブルーの分解率が高かった。

次いで,それぞれ有有有の分解率が高かった。

考察

結果では、多少亜鉛による抗酸化作用が見られた。2 回の実験のうち一方は有無有より有有有の分解率が低かったので抗酸化作用があると考えられる。

しかし、亜鉛板(1cm×1cm)を 4 枚しか用いておらず、表面積が小さいため有有有と有無有の差は誤差によるものとも考えられる。

結論

チョーキング現象を起こすことはできたが酸化チタンのみでは不可能であった。

酸化剤を用いることによって酸化チタンの酸化能力を向上させるとは判断しがたい。

また、還元剤を用いた際にも酸化能力を抑制させられるとは断言できなかった。

今後の課題

チョーキング現象を安定して起こすために、追実験を行う。

酸化剤を用いた実験では、過酸化水素水の濃度をより細かく区切ることで、酸化チタンの酸化能力が向上したことを証明する。

酸化能力を抑制することに向けて、亜鉛以外の還元剤も用いて模索していきたい。

輪ゴムに接触する金属の違いによる劣化の変化

The Difference in the Degree of the Rubber Bands' Deterioration Caused by Different Kinds of Metals

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

酒井芳樹

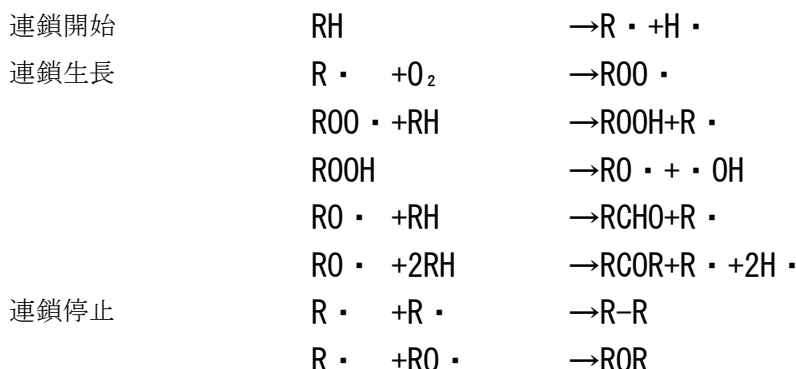
目的

ゴムやプラスチックは、熱や湿度、また、紫外線など様々な要因で劣化が促進されることが知られている。その要因の 1 つに、金属との接触による劣化促進がある。今回の研究では、接触する金属の違いによって劣化の度合いがどのように変化するか、という観点から、金属接触による劣化促進作用の重要性を鑑みることが目的として、実験を行った。

* ゴムやプラスチックの劣化の原理

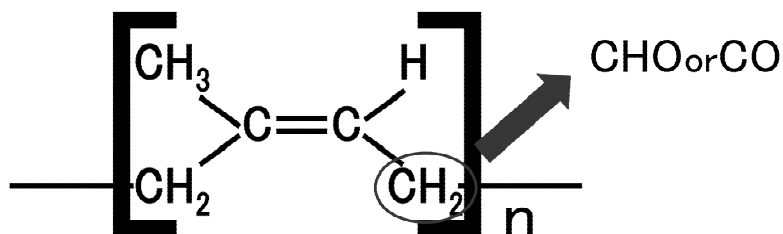
ゴムやプラスチックは、自然状態でも熱や酸素が存在すれば、自動的に劣化が起こる。これを、自動酸化反応という。ここでいう劣化とは、ゴムやプラスチックのポリマーが、酸化されることである。このポリマーの自動酸化反応の化学式は、以下のように表される。

自動酸化反応

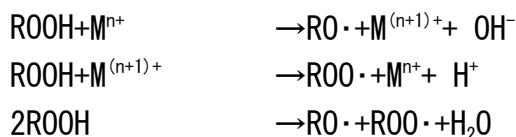


連鎖生長の最後の 2 つの反応が起こるとき、ポリマー(R)は、酸素(O)を含む形で安定し、酸化される。これがすなわち劣化である。

今回の研究では、実験に市販の輪ゴムを用いた。輪ゴムは、天然ゴムからできていて、天然ゴムの主成分はポリイソプレン($[C_5H_8]_n$)である。



そして、この自動酸化反応が起こるとき、金属イオンは電子の受け渡しをする触媒の役目を果たす。それによって、ポリマーの自動酸化反応が促進される。



実験(1)は、金属の種類の違いによる、劣化促進作用の程度の違いを調べることを目的として、実験を行った。

実験(2)は、金属による劣化促進作用が、時間経過に伴って、どのように変化していくのかを調べることを目的として、実験を行った。

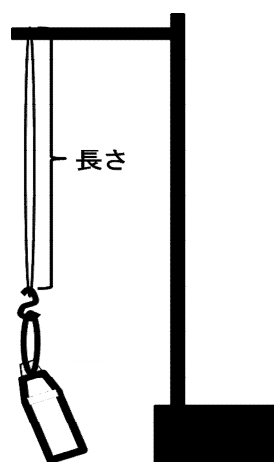
～実験(1)～

方法

- ① 約 5cm 四方の銅・鉄・鉛の金属板を用意し、それらをペトリ皿に置く。
- ② それらの金属板の上に輪ゴムを乗せ、そのうちの半分には、もう 1 枚同じ種類の金属板を乗せる。このとき、輪ゴムが金属板に、片面か両面で接触している状態である。
- ③ それらのペトリ皿を、25℃または 45℃に設定したインキュベーターに入れ、2 週間放置する。
- ④ 2 週間後、処理した輪ゴムを鉄製スタンドに吊るし、500g のおもりを S 字フックで輪ゴムに掛け、長さを 5 分ごとに 30 分間測定する。

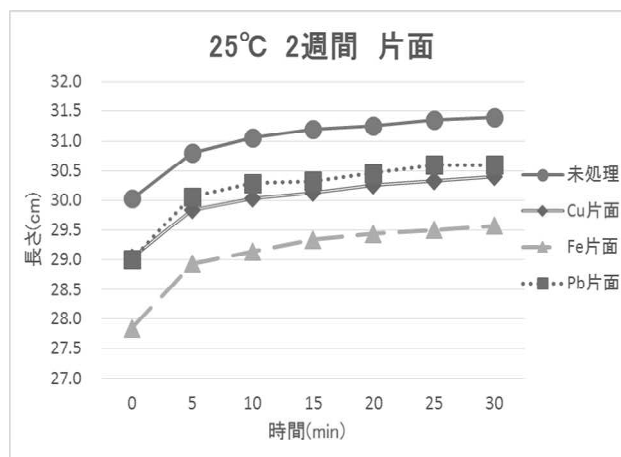


金属との接触状態

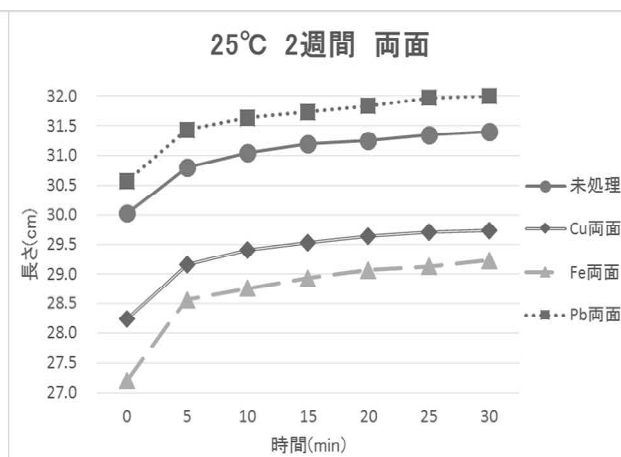


測定方法

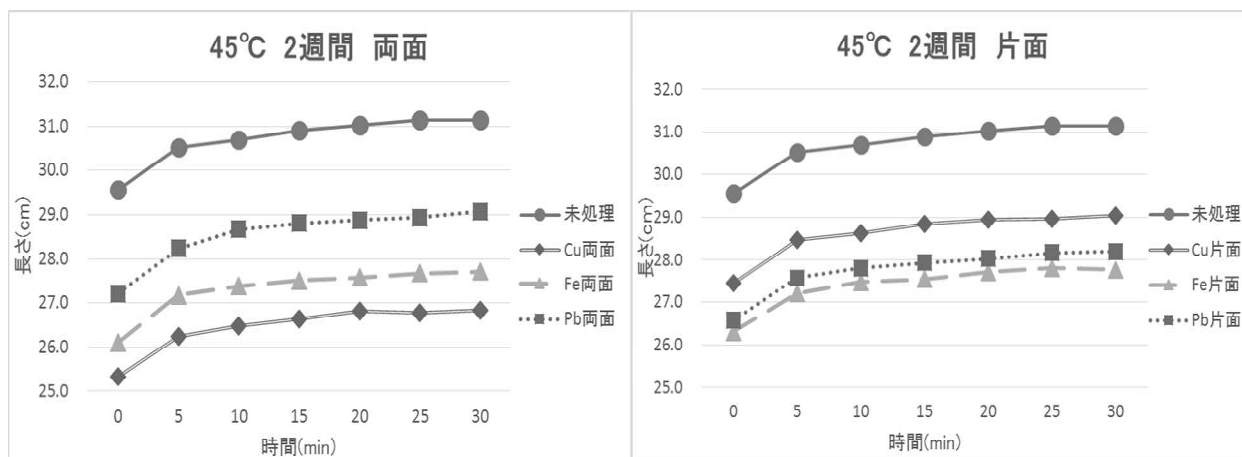
結果



25℃片面では、金属接触がすべて、未処理の長さを下回った。また、長さが短い順に並べると、鉄、銅、鉛となった。銅と鉛の長さの違いが小さかった。



25℃両面では、鉛が未処理より長くなった。しかし、鉄と銅は未処理より約 2～3cm 短くなった。金属接触を長さが短い順に並べると、鉄、銅、鉛の順番になった。



45°C片面では、すべて未処理より約 2~3cm 短くなった。順番は長さが短い順に、鉄、鉛、銅であった。鉄と鉛との差が小さかった。3 種類の金属すべてが未処理との差が 2cm 以上だった。

45°C両面では、すべてが未処理より約 2~4cm 短くなった。順番は、長さが短い順に、銅、鉄、鉛であった。

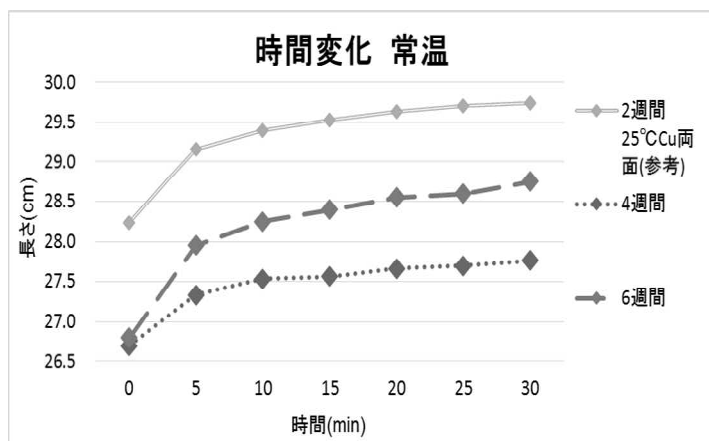
(未処理は n=3, 金属接触は n=6)

～実験(2)～

方法

- ① 銅板と両面接触している輪ゴムを用意し、ペトリ皿に置く。
- ② それらのペトリ皿にサランラップをかけて、4 週間または 6 週間、常温で放置する。
- ③ 4 週間または 6 週間放置した輪ゴムを、実験(1)と同じ方法で測定する。

結果



6 週間放置の 3 個の試料のうちの 1 個が、500g のおもりを吊るしてすぐに切れてしまった。よって、6 週間放置は 2 個平均の値である。他は 3 個平均の値である。

0 分後の長さはどちらもほぼ同じであった。しかし、30 分後では、6 週間のほうが、4 週間より約 1cm 長くなった。2 週間の結果を参考にすると、0 分後の長さが約 1.5cm 短くなっている。

考察

～実験(1)～

長さが短い順に並べた結果が 1 つに定まらなかった。全体的に鉄が最も短いように見える。銅と鉛を比べると、鉛のほうが比較的長くなっているように見える。したがって、長さが短い順に、鉄、銅、鉛という順番になっているのではないかと考えられる。

また、全体的に金属接触のほうが、未処理の輪ゴムよりも長さが短くなった。ポリマーの自動酸化反応は、ポリマー同士が架橋することで終了する。架橋とは、ポリマー同士が連結される反応である。そのため、劣化が進むと架橋反応を起こし、輪ゴムは柔軟性を失っていくものと思われる。よって、輪ゴムは長さが短いほど、劣化していると考えられる。

25℃両面の鉛のグラフだけが、未処理を上回った。その理由として、ポリマーの自動酸化反応に、酸素が大きく関わっていることが考えられる。両面で接触していると、その分空気への接触面積が小さくなる。そのため、鉛に接触させることによる劣化の促進よりも、空気に触れずに劣化が抑制される度合いのほうが大きかったためであると考えられる。

～実験(2)～

6 週間放置のほうが、4 週間放置より 30 分後の伸びの差が大きくなった。放置する期間が長くなったことで劣化が進み、輪ゴムの元の状態に戻ろうとする力が弱まったのだと考えられる。

結論

金属接触による劣化促進反応は起こっていると考えられる。しかし、接触する金属の違いによる劣化促進作用の度合いの違いは、温度や接触状態などの環境に大きく左右されることが考えられる。

今後の課題

紫外線や湿度などの、様々な環境要因も含めて、金属接触による劣化促進作用が成り立つのか、そしてどの程度影響してくるのかを調べたい。今回は 3 種類の金属を用いて実験を行ったが、今後は金属の種類を増やして実験していきたい。また、今回は 2 週間より長い期間放置する実験を銅以外で行わなかったため、今後は他の金属でどのような違いがあるのかを調べていきたい。

参考文献

- 1) 大武義人：腐食と劣化(6)合成樹脂(ゴム・プラスチック)の劣化評価・分析手法、空気調和・衛生工学 第 80 巻 第 1 号(2005)
- 2) 本間精一：プラスチックの実用強さと耐久性(7)、三菱化学 プラスチック Vol. 55, No. 4 (2004)

反省感想

私がこの研究を通して、一番頭を悩ませたのは、劣化の測定方法についてである。今回、私は劣化という言葉キーワードとして置きながら研究を進めていったが、「劣化」という言葉を一概に説明するのは困難である。それは、測定にとっても同じことで、表面の硬度を比べるのか、密度を比べるのか、または原子レベルで比べるのかによって、結果は違ってくる。また、高校でできる範囲も限られており、例えば、値段が何千万円もする機械で、輪ゴムの分子構造を解析するようなことは不可能である。今回は、自作の器具を用いて実験を行ったが、この実験の結果が果たして本当に劣化の状態を示しているのかを証明する手段は持ち合わせていない。しかし、輪ゴムのある側面における劣化についての結果であるとは考えている。今回は 1 パターンの測定方法でしか実験を行わなかったため、他の様々な側面からの輪ゴムの劣化へのアプローチ方法を用いて、より高い精度の劣化についての議論ができれば良かったと思う。

クエン酸を用いて土壌から放射性物質を分離する方法

The Method of Separating Radioactive Substances from Soil by Using Citric Acid

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

渡邊 有希人

目的

2011 年の福島第一原子力発電所の放射能漏れによって、大量の汚染土の処理が問題となっている。そこで、クエン酸及びその塩を用いて土壌中の放射性物質を分離する方法について検証を行った。昨年度の研究で、カルボン酸の価数による放射線量の減少率について検証したところ、価数が多いほど放射線量の減少量が大きくなったため、3 価のカルボン酸であるクエン酸を用いた。

土壌中の放射性セシウムの状態とは

文献によると、放射性セシウムは、土壌中で固定態、交換態、水溶態として存在している。(図 1) 固定態は、土壌中の鉱物によって固定されており、かなり溶出しにくい。一方、イオン交換態及び、水溶態は溶出し得る。

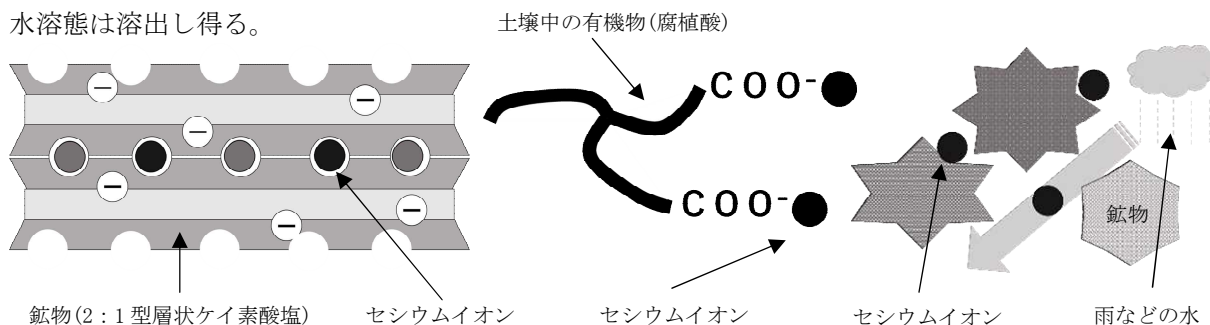


図 1 固定態(左), 交換態(中), 水溶態(右)の放射性セシウム

実験 I

クエン酸及びクエン酸アンモニウム水溶液の濃度と、放射線量の減少率との関係を検証した。

<方法>

- (1) クエン酸及びクエン酸アンモニウム水溶液 100mL (濃度 : 0.2, 0.4, …, 1.0mol/L) を用意する。
- (2) 試料 (放射性物質を含む土) の放射線量を測定する。
- (3) 試料を水溶液に加え攪拌して、20 分間放置する。
- (4) 試料と水溶液の混合物を減圧濾過する。
- (5) 残渣 (ろ紙に残った固形物) を乾燥させて、その放射線量を測定する。

<放射線量の測定について>

測定器は、HORIBA Radi PA-1100 と、放射能簡易測定キットを用いた。(図 2) 自然界には放射線が常に飛んでおり、毎回の測定条件を揃えるために、鉛を用いて遮蔽することが望ましい。化学室の流しには薄い鉛が貼ってあり、空間放射線量を周囲のおよそ半分に下げることができるので、流しの中で実験を行った。

試料の放射線量を測定すると、図3のように測定値にばらつきが生じる。そこで10秒ごとに、試料の放射線量を20点測定し、その平均値を測定値(μSv/h)とした。また、以下の式で放射線量の減少率を求めた。

$$\text{放射線量の減少率 (\%)} = \frac{\text{試料の測定値} - \text{残渣の測定値}}{\text{試料の測定値} - \text{バックグラウンドの測定値}}$$



図2 測定装置

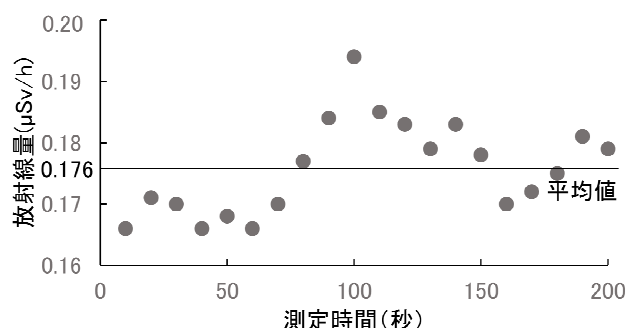


図3 試料の測定値

<結果>

0.40mol/L のクエン酸水溶液を除いて、どちらの試薬もその水溶液の濃度と放射線量の減少率は、正の相関がみられた。

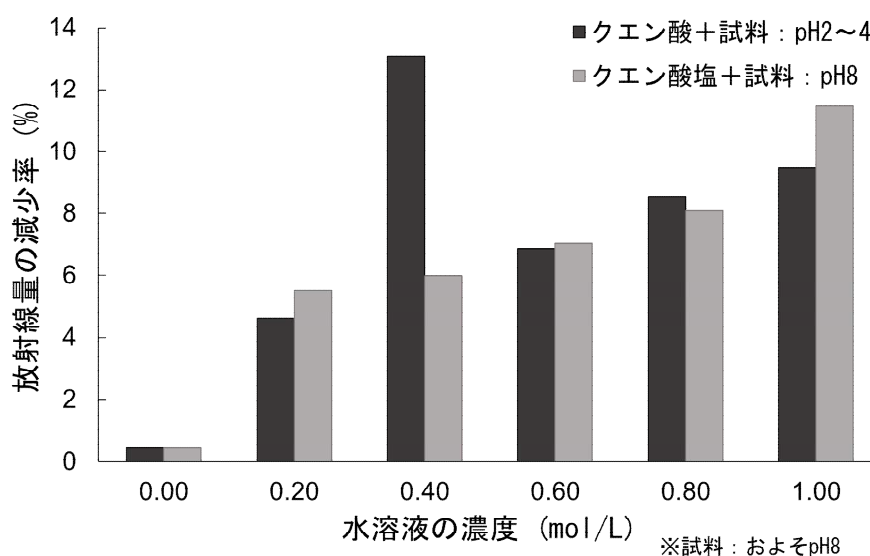


図4 クエン酸・クエン酸アンモニウム水溶液の濃度と放射線量の減少率

<考察>

試料と水溶液の混合物中において、電離したクエン酸は試料中の放射性セシウムを含む様々な金属イオンと結びつくことによって、試料の放射線量が減少したと考えられる。

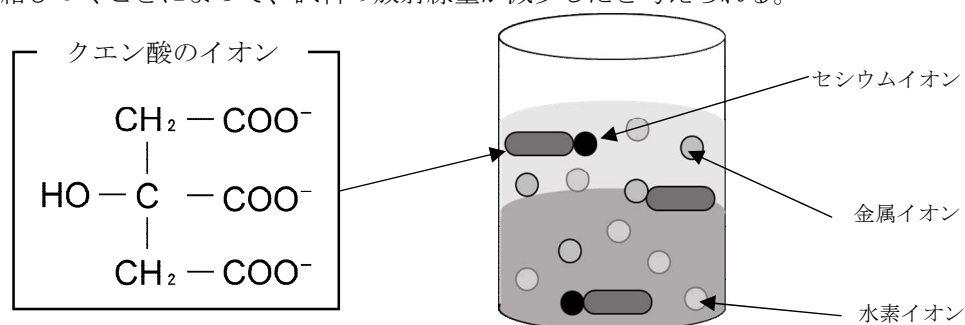


図5 混合物中のイオンのイメージ

実験Ⅱ

クエン酸アンモニウム水溶液と塩酸を用いたときの土壌の放射線量の減少率との関係を検証した。

<方法>

- (1) 塩酸及びクエン酸アンモニウムの水溶液 100mL(濃度：1.0mol/L)を用意する。
- (2) 実験Ⅰの(2)～(5)と同様の方法で試料を処理する。
- (3) 処理を複数回繰り返す。

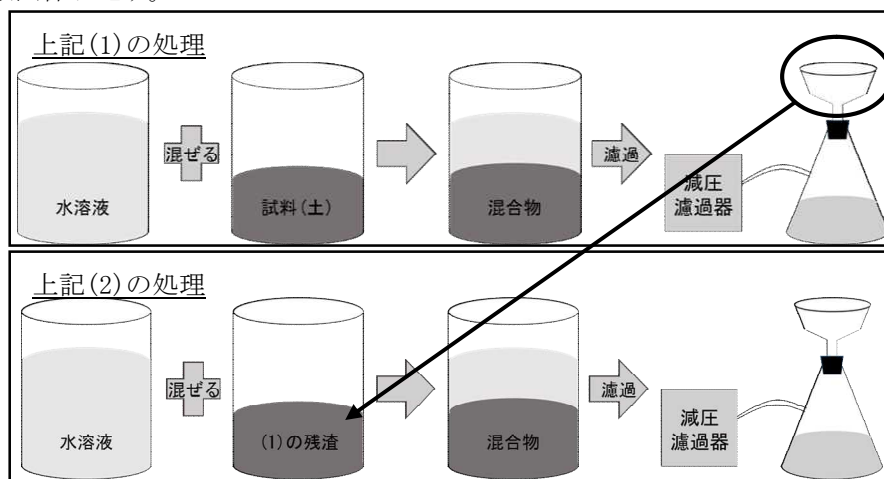


図6 実験Ⅱの方法

<結果>

塩酸及びクエン酸塩を入れる順番を変えても効果はあまり変わらなかった。また、クエン酸アンモニウムで複数回処理しても分離効果はあまり増加しなかった。

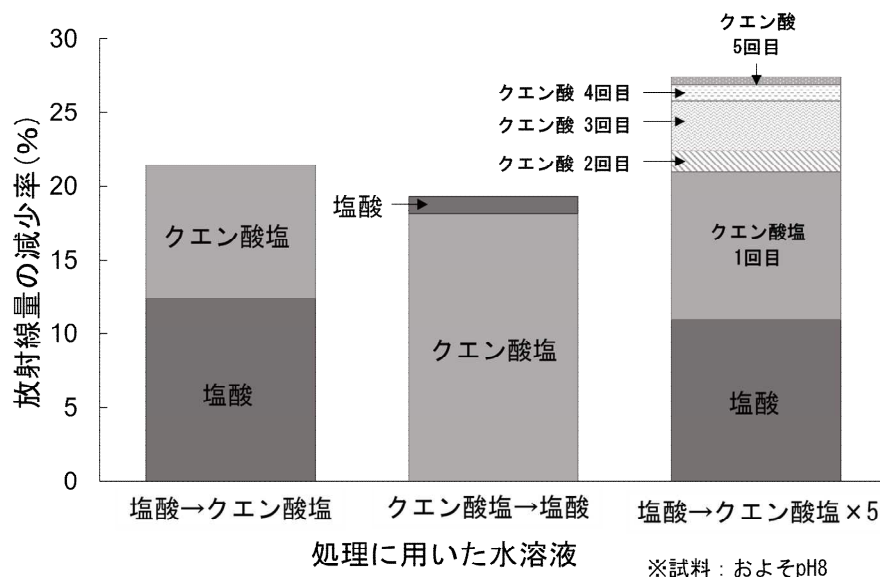


図7 クエン酸アンモニウム水溶液と塩酸を用いたときの放射線量の減少率

<考察>

試料に塩酸を加えると水素イオンと塩化物イオンに電離する。交換態の放射性セシウムを含む金属イオンと、水素イオンが交換される。そして、クエン酸アンモニウム水溶液を加えることで、陽イオ

ン交換された金属イオンと結びつくと考えられる。(図8) また、クエン酸アンモニウムで繰り返し洗浄することによって徐々ではあるが、試料の放射線量を減少させられる。

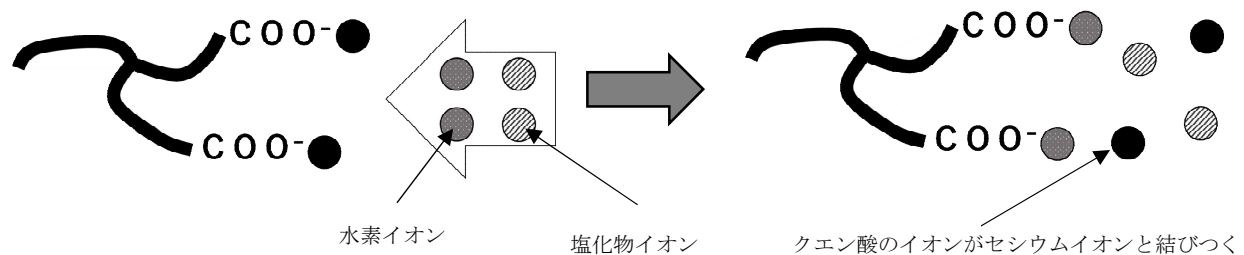


図8 イオン交換態の放射性セシウムに塩酸を加えたときの変化

結論

クエン酸及び、その塩の水溶液を用いて放射性物質を分離することは可能である。クエン酸アンモニウムなどのクエン酸塩を利用すると、土壌の pH に影響されにくいことから様々な種類の土壌に利用できるのではないかと考えたが、実際はクエン酸と効果はあまり変わらなかった。

また、多くの土壌において、放射性セシウムの 90%以上が固定態，10%以下がイオン交換態または、水溶態で存在している。(文献より) 実験Ⅱの「塩酸→クエン酸塩×5」のように繰り返し処理しても放射線量の減少率はおおよそ 27%にとどまっている。つまり、固定態の放射性セシウムを溶出させるような方法を見つけない限り、化学的処理によって土壌中の放射性物質の多くを分離することは難しい。

今後の課題

土壌中の鉱物の間に挟まっている固定態のセシウムを分離させることが課題である。

謝辞

東邦大学名誉教授 桂川秀嗣先生にご協力いただきましたことに対して、感謝申し上げます。

参考文献

公益財団法人 地盤工学会「土壌中の放射性セシウムの挙動に関するレビュー」

野口祐樹，木田敏之，加藤栄一，清水喜久雄，明石満（2014）「汚染土壌からの放射性セシウム抽出技術の開発」

中尾 淳（2012）「セシウムの土壌吸着と固定」

三好弘一（2012）「土壌からの放射性セシウムの分離」

紫外線がジョロウグモの牽引糸に与える影響

The influence of ultraviolet rays on the traction thread of *Nephila clavata*

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

大草 三起

目的

牽引糸はクモが常に糸疣から出している糸であり、命綱としての役割を担っている。そのため 7 種類あるクモの糸の中で最も高い引っ張り強度を有する。本実験ではメスの成体のジョロウグモから牽引糸を採取し、牽引糸に紫外線を照射した後に糸の引っ張り強度と伸びを測定して紫外線がジョロウグモの牽引糸にどのような影響を与えるかを調べる。

方法

見かけ上 1 本に見えるジョロウグモの牽引糸は 2 本の糸から成っているが(図 1),両方とも常に等しい直径及び引っ張り強度を持っているとは限らない。そのため今回は 2 本で構成されている状態の見かけ上 1 本に見える糸を本研究での 1 本の糸とし、断面は完全な円であるものとした。また実際のジョロウグモの牽引糸 1 本の持つ直径が $4\sim 5\mu\text{m}$ であるので本実験で 1 本として扱う牽引糸の直径を $8\mu\text{m}$ において引っ張り強度を計算した。牽引糸のサンプルはメスの成体のジョロウグモから採取した。紫外線ライトはアズワン社の LUV-16 と UVG-54 を用い、牽引糸から 36cm の距離で照射した(図 2)。

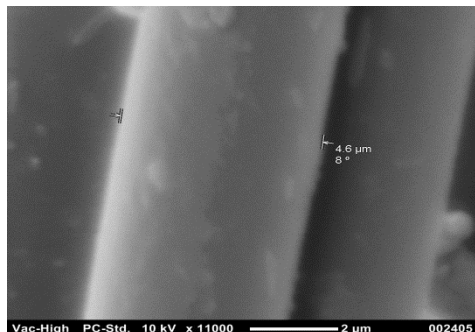


図 1 牽引糸の構造 (SEM 像)

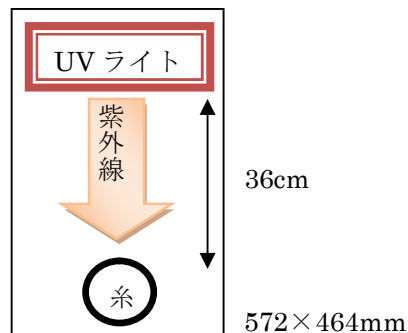


図 2 紫外線の照射方法

実験 1

365nm の紫外線を照射時間を 24 時間,48 時間,72 時間に分けてそれぞれ照射した後牽引糸の引っ張り強度を測定した。また 254nm の紫外線を照射時間を 24 時間,48 時間に分けてそれぞれ照射し同様に引っ張り強度を測定した。対照として紫外線を照射しない場合の引っ張り強度も測定した。引っ張り強度は以下の式で算出した。

$$\text{引っ張り強度} = (1/2 \times gx \times 10^3) / \pi (4 \times 10^{-6})^2 \text{ [Pa]}$$

x : 引っ張り強度の測定値 [g] g : 重力加速度 π : 円周率

ループ状にした牽引糸の一端に錘を取り付け、ループにナイロンの糸を通してそれを一定速度で引っ張ることによって引っ張り強度を測定した(図 3)。牽引糸が破断した時の錘の重さを読み取り、その値を上記の式の x に代入した。伸びは等しい長さに束ねた牽引糸の一端を板で挟んで固定し、もう一端を引っ張ることで測定した(図 4)。



図 3 引っ張り強度の測定装置

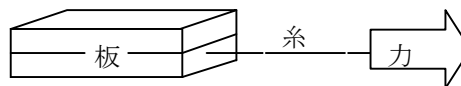
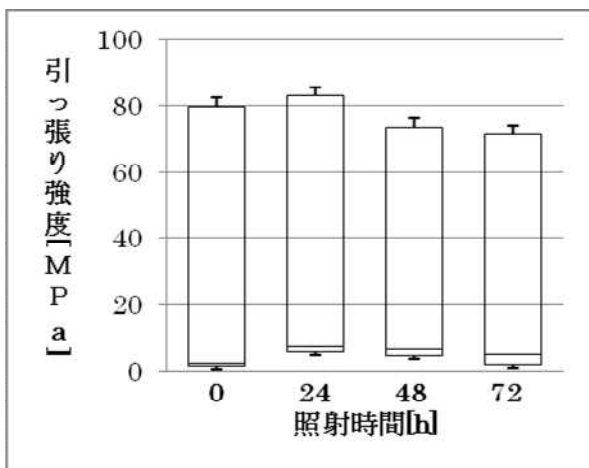


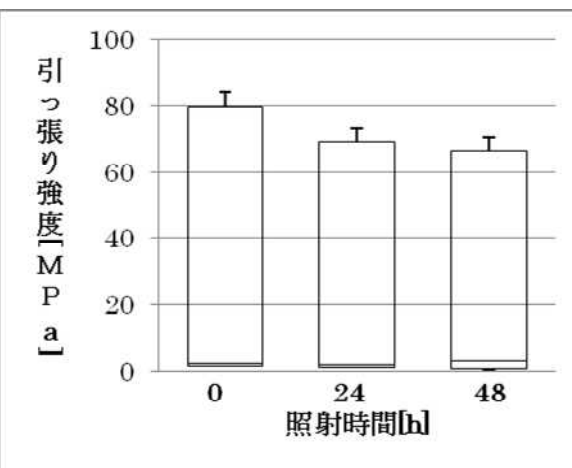
図 4 伸びの測定方法

結果 1

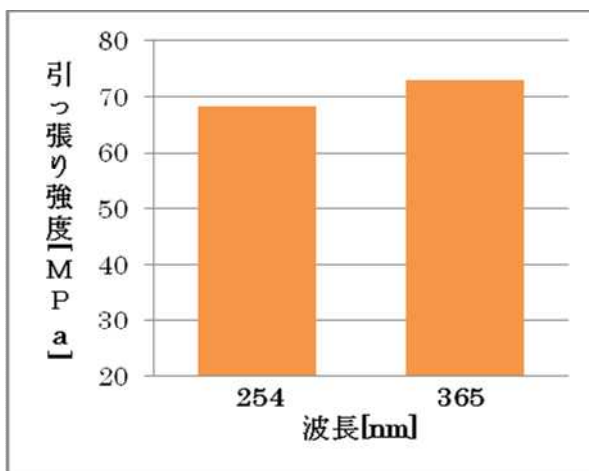
365nm, 254nm の紫外線とともに牽引糸の引っ張り強度を減少させ、その傾向は紫外線の照射時間が長い方が強くなった(グラフ 1,2)。同じ紫外線の照射時間の下では 365nm の紫外線より 254nm の紫外線の方が牽引糸の引っ張り強度を減少させた(グラフ 3,4)。



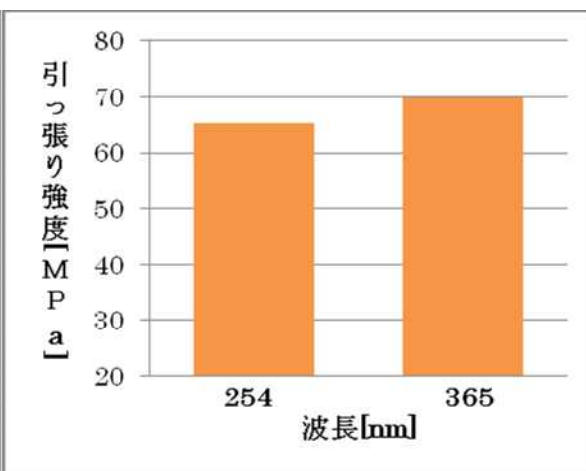
グラフ 1 365nm 照射における引っ張り強度



グラフ 2 254nm 照射における引っ張り強度



グラフ 3 24 時間照射時における引っ張り強度



グラフ 4 48 時間照射における引っ張り強度

考察 1

365nm の紫外線を 24 時間照射した場合は引っ張り強度の減少はみられないが、48 時間照射した場合にはみられる。これはジョロウグモが 2 日ごとに巣の張り替えを行う理由の 1 つであると考えられる。また同じ紫外線の照射時間の下で 254nm の紫外線の方が 365nm の紫外線より牽引糸の引っ張り強度を減少させることから、254nm の紫外線の方が 365nm の紫外線より牽引糸を構成するタンパク質の変性に影響を与えやすいと考えられる。

実験 2

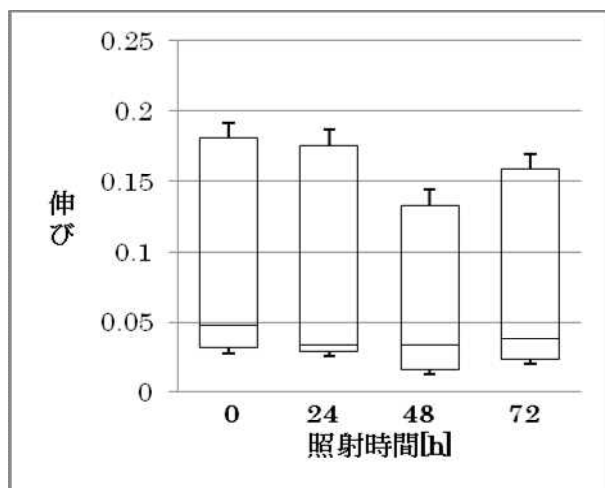
365nm の紫外線を照射時間を 24 時間、48 時間、72 時間に分けてそれぞれ照射した後牽引糸の伸びを測定した。また 254nm の紫外線を照射時間を 24 時間、48 時間に分けてそれぞれ照射し同様に伸びを測定した。対照として紫外線を照射しない場合の伸びも測定した。伸びは以下の式で求めた。値は測定前の糸の長さに対する破断時の長さの割合であり、単位はない。

$$\text{伸び} = (L - L_0) / L_0$$

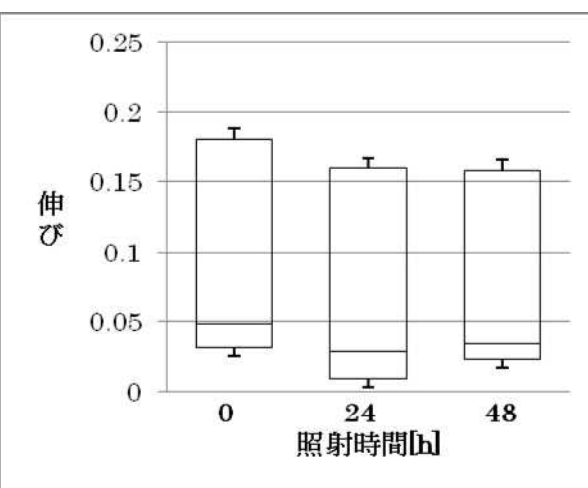
L_0 : 元の糸の長さ L : 破断時の糸の長さ

結果 2

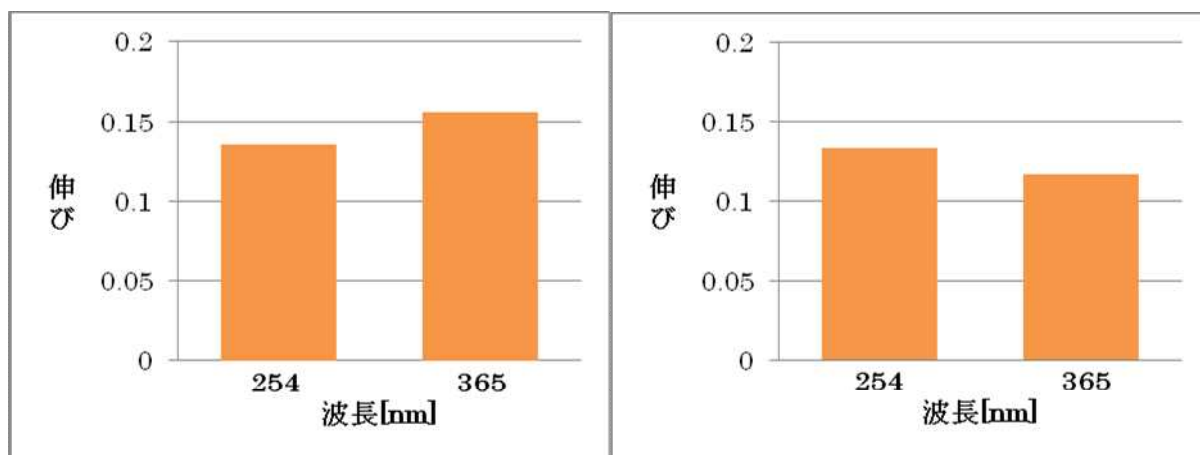
365nm、254nm の紫外線はともに牽引糸の伸びを減少させた(グラフ 5,6)。365nm の紫外線を照射した場合において 72 時間照射した時の伸びは 48 時間照射した時の伸びよりも高い値が得られた(グラフ 5)。紫外線を 24 時間照射した場合において 254nm の紫外線の方が 365nm の紫外線を照射した時よりも低い値が得られ、48 時間照射した場合においては 254nm の紫外線の方が 365nm の紫外線を照射した時よりも高い値が得られた(グラフ 7,8)。



グラフ 5 365nm 照射における伸び



グラフ 6 254nm 照射における伸び



グラフ 7 24 時間照射における伸び

グラフ 8 48 時間照射における伸び

考察 2

365nm の紫外線を 24 時間照射した場合は糸の伸びの減少はみられないが、48 時間照射した場合にはみられる。このことからジョロウグモの巣の張り替えの周期に関して考察 1 と同じ仮説を立てられる。グラフ 5 において 72 時間照射の時の伸びが 48 時間照射の時の伸びよりも高い値が得られ、またグラフ 8 において 254nm の紫外線照射の時の伸びが 365nm の紫外線照射の時の伸びよりも高い値が得られたが、これらの理由はおそらくデータ不足によるものであり、そのためにばらつきが生じやすくなったと考える。

結論

365nm, 254nm の紫外線はジョロウグモの牽引糸の引っ張り強度を減少させ、その程度は紫外線の照射時間が長い方が大きくなる。また同じ紫外線の照射時間の元では 254nm の紫外線の方が 365nm の紫外線より牽引糸の引っ張り強度を減少させる。これらは紫外線が牽引糸を編成しているタンパク質を変性させること及びその程度は 254nm の紫外線の方が 365nm の紫外線よりも強いということを裏付ける。また 365nm, 254nm の紫外線はジョロウグモの牽引糸の伸びを僅かに減少させるが、今回の実験からは紫外線の照射時間及び波長と牽引糸の伸びとの関係が読み取れず、伸びと引っ張り強度との関係も読み取れなかった。

今後の課題

ジョロウグモから牽引糸のサンプルを採取するのが難しく、実験データを僅かしか得られなかった。そのためデータの傾向を読み取りづらく、また結果の信頼性も低くなってしまった。実験 2 については、伸びの測定方法に改善の余地が多くみられる。実験を手動で行ったため一定速度で糸を引っ張ることができなかった。またはじめの糸の長さが短かったため伸びの細かい値を出すことができなかった。今後はデータ数を増やしてより信頼できる結果を出した上で伸びと引っ張り強度との関係を調べてグラフ化したい。さらに牽引糸を構成するタンパク質のアミノ酸配列やそれらのタンパク質同士の結合の関係などを調べてクモの牽引糸の引っ張り強度を裏付ける原因について研究したい。

光合成速度を簡易に測定するための光合成実験系の確立

Creating An Experimental System to Measure Photosynthetic rate Easily

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

小林 明日香

目的

従来光合成速度の測定には葉面積が大きい葉、長い時間、複雑な実験系が必要とされていた。そこでより簡単に光合成速度を測定できる実験系の確立を目的とした。尚、この研究では光合成速度を単位面積当たりの二酸化炭素濃度変化とする。

方法

今回の実験では二種類の実験を行った。実験条件を以下の表に示した。また、図 1 は実験 1 で実際に使用した植物、図 2 は実験 2 で実際に使用した植物の写真である。

表

	実験1	実験2
実験に使った植物種	・トマト ・キュウリ ・ホウレンソウ ・コマツナ	・ダイコン ・カブ ・コマツナ
育成条件	屋外で21日間	インキュベーター内で7日間
実験に使用した植物のパーツ	第二葉・第三葉	根・茎・葉
実験時の気温	24.5℃	25.0℃

図 1

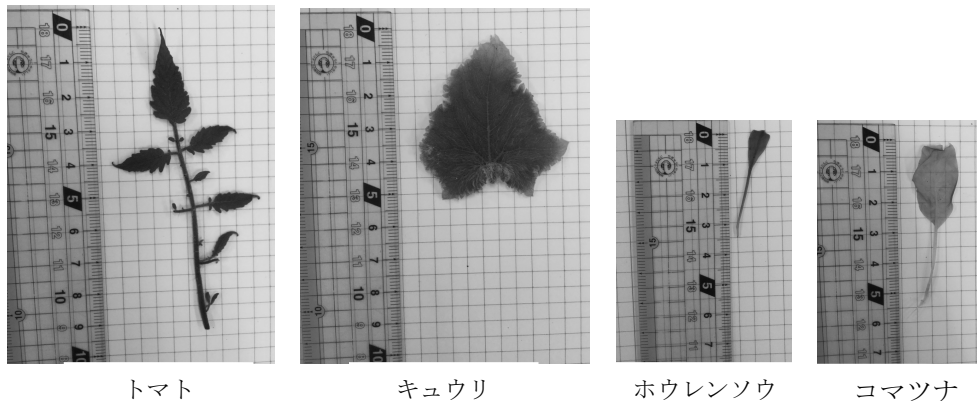
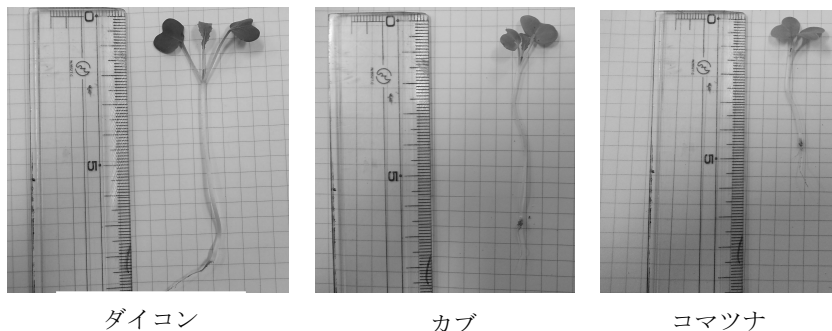


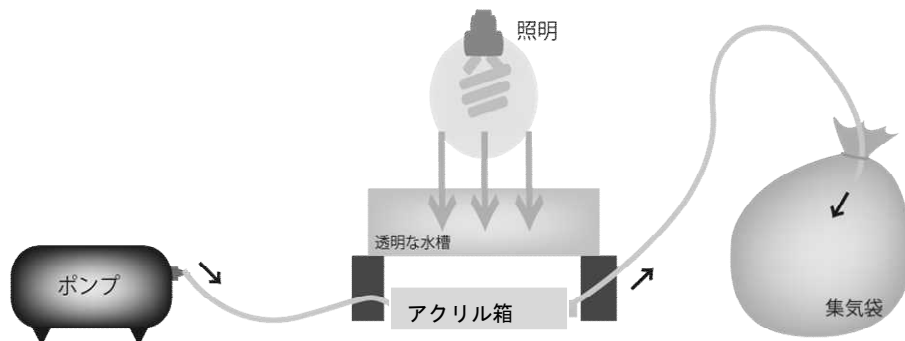
図 2



測定方法（実験 1・実験 2 共通）

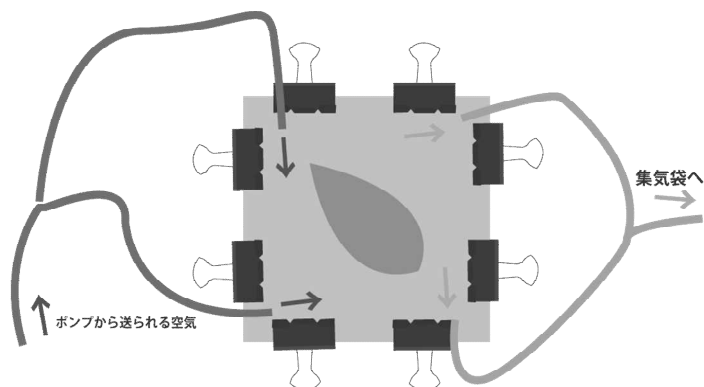
①下図のように光合成測定装置を組み立てた。

尚、ここでの照明装置は白熱灯であり透明な水槽は白熱灯からの熱を吸収させるために設置した。



②下図のようなアクリル箱内に植物を入れた。

尚、アクリル箱は底面が 15 cm 四方の正方形、高さが 1 cm のアクリル箱に 2 本のチューブで送気、別の 2 本のチューブで集気するように作った。



③五分間送気及び集気を行った。

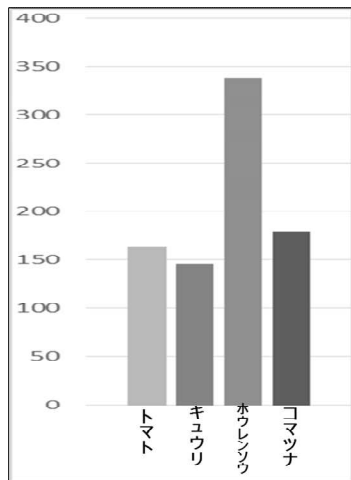
④実験開始時及び実験終了後の二酸化炭素濃度変化と葉面積を測定した
また、実験 1 のみクロロフィルの測定も行った。

結果

実験 1 の結果

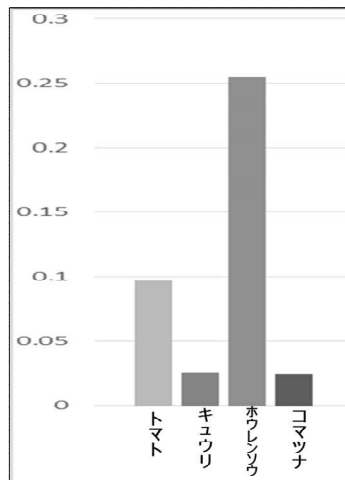
グラフA

二酸化炭素濃度変化
クロロフィル量



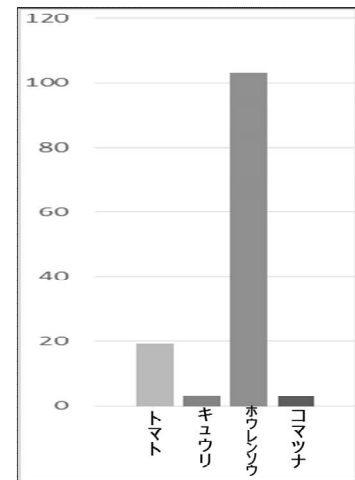
グラフB

クロロフィル量
葉面積

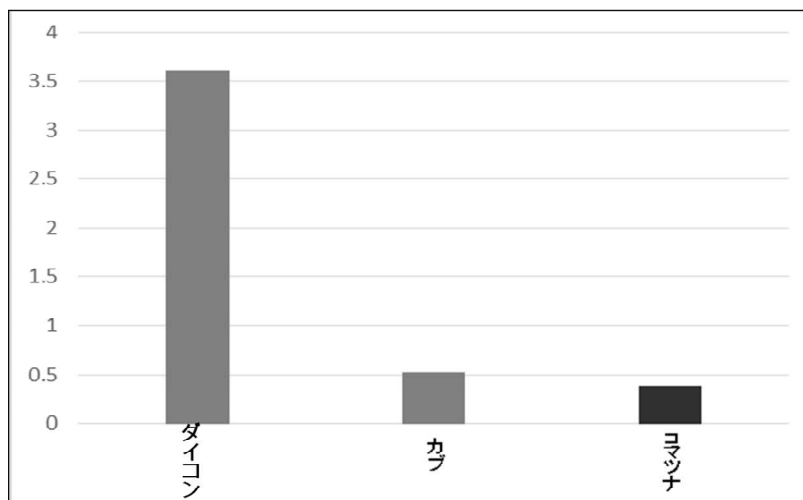


グラフC

二酸化炭素濃度変化
葉面積
(ppm/cm²)



実験 2 の結果



グラフD

二酸化炭素濃度変化
葉面積
(ppm/cm²)

考察

- ・グラフ A において、トマト・キュウリ・コマツナのクロロフィル量当たりの二酸化炭素濃度変化に有意差が見られなかった点より、グラフ C の光合成速度は単位面積当たりのクロロフィル量に依存すると考えられる。

- ・グラフ A のハウレンソウにおけるクロロフィル量当たりの二酸化炭素濃度変化が大きいこと、並びにグラフ B のハウレンソウにおける単位面積当たりのクロロフィル量が他より多かったことがグラフ C の光合成速度が大きかった原因として挙げられる。

- ・実験 1 では 2 1 日間育てた植物体の第二葉と第三葉で実験を行った。しかし実験 2 では植物全体を使うことによって 7 日間の栽培期間で種間の光合成速度の差を見ることができた。

結論

7 日間という短期間で育てた植物全体を使い、かつ簡略化された光合成装置を用いることによって 1 回の測定当たり 5 分間という短時間で光合成速度の種間の差を導く実験系を作ることができた。

今後の課題

- ・呼吸速度の測定も並行して行う。
- ・グラフ A とグラフ B におけるハウレンソウの値が大きかった理由を調べる。
- ・温度を変化させたときの光合成速度の変化を調べる。
- ・他の植物でも実験を行う。

参考文献

加藤栄/宮地重遠/村田吉男（1981）『光合成研究法』共立出版

ミズキンバイ (絶滅危惧Ⅱ類) が生育しやすい環境と保全の考察

Consideration of proper environment and preservation for *Ludwigia stipulacea* to grow

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

松原瑞貴 小原瑞稀

【目的】

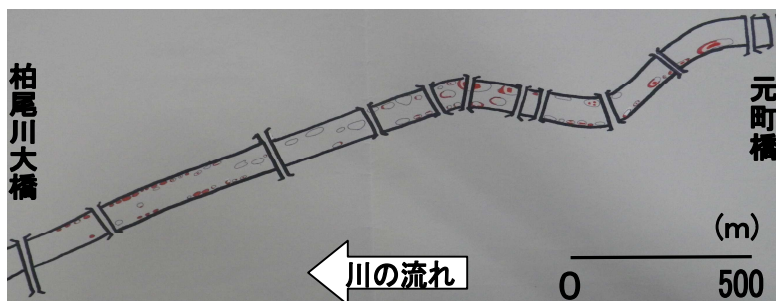
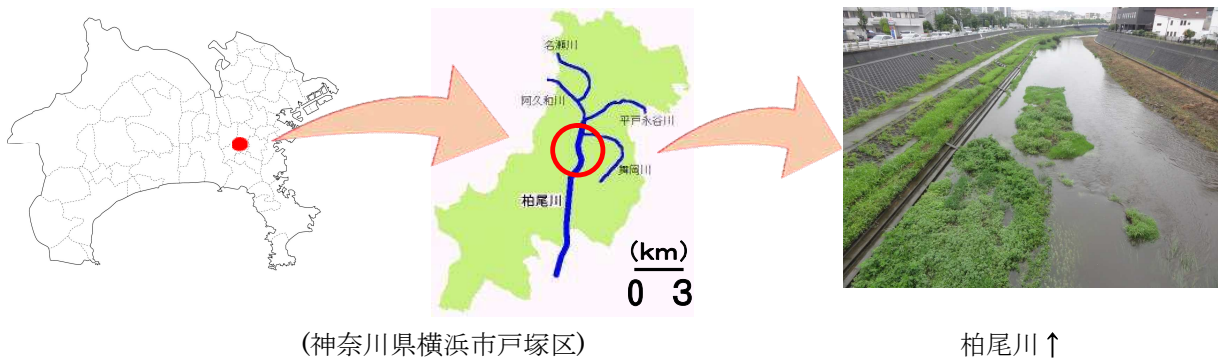


絶滅危惧Ⅱ類であるミズキンバイの生育地を調査し、生育しやすい環境を明らかにする。

ミズキンバイ (左の写真) とは、アカバナ科チョウジタデ属の水辺に生育する抽水性多年生草本の攪乱植物で、現在は絶滅危惧Ⅱ類となっている。千葉県レッドデータブックによると、千葉、神奈川、高知、宮崎の 4 県にのみ自生しているとされている。 県立船橋高校のビオトープにも生育している。

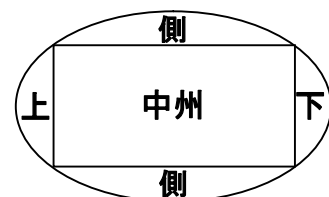
【調査方法】

2016 年 7 月と 10 月にミズキンバイが生育している神奈川県横浜市戸塚区にある柏尾川の元町橋から柏尾川大橋までの約 3 km の範囲を調査した。



← 柏尾川の図

丸が書いてあるところが中州で、丸が塗りつぶされているところにミズキンバイが生育している。

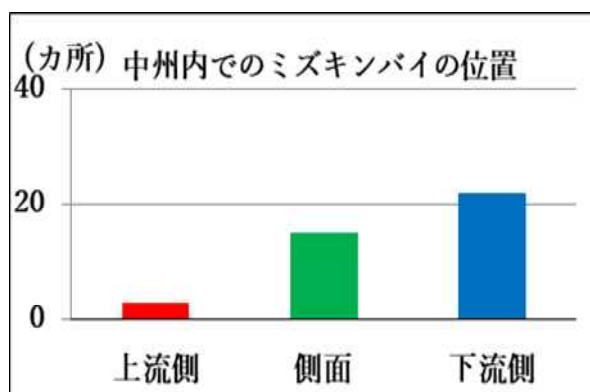


【調査① (2016 年 7 月 10 日)】

1. 73 ヶ所あった中州を 1 つずつ上流側(上)、側面(側)、下流側(下)に分け、ミズキンバイの分布状況を調べた。
2. 中州内のミズキンバイと競合植物 (セイバンモロコシ、ヒメガマ、オオイヌタデ、ミゾソバなど) の草丈を調べた。



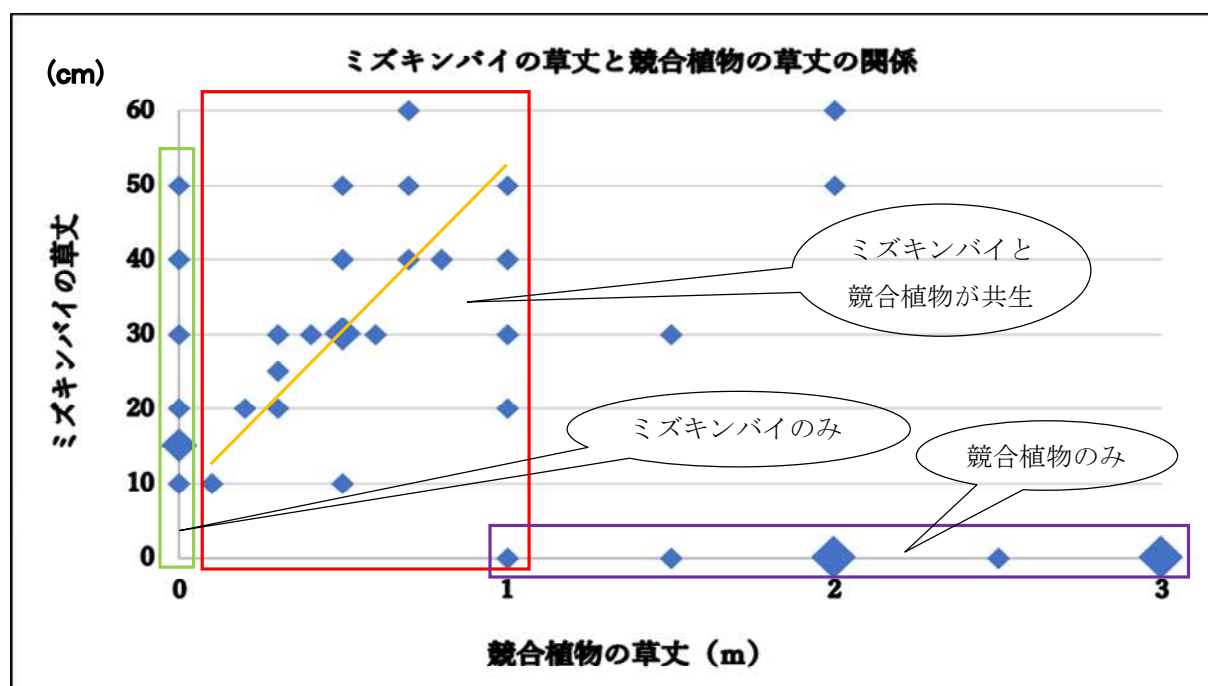
【調査結果①-1】



【考察①-1】

ミズキンバイは上流側よりも下流側や側面に多く生育していた。これは上流から流れてきたミズキンバイが、はじめは中州の上流側の植物などに引っ掛かるが、川の流速に耐えられず、流速の緩やかな側面や下流側に移動して定着したものが多かったと考えられる。

【調査結果①-2】



◆ 1～3 カ所で確認

◆ 4～6 カ所で確認

◆ 7～9 カ所で確認

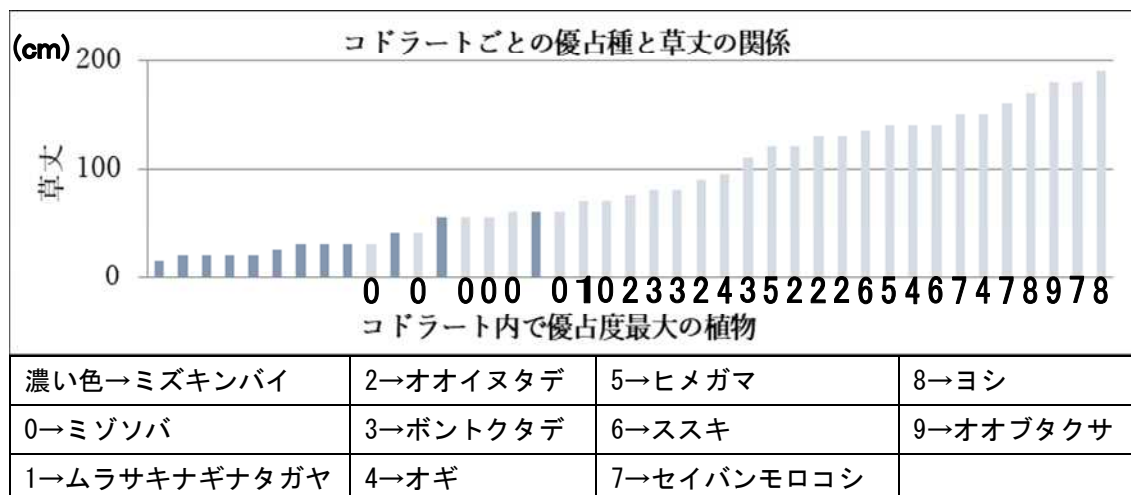
【考察①-2】

中州全体の平均草丈が高くなると、ミズキンバイの平均草丈も高くなる。しかしミズキンバイには成長できる高さに限界があり、競合植物の平均草丈が1 m以上になると陽生植物で草丈の低いミズキンバイは草丈の高い植物の陰に隠れてしまうため、生育できなくなる。

【調査②(2016年10月3日)】

中州で無作為に 1m×1mのコドラートをつくり、植物の種類や草丈、被度、頻度を 42 か所で調べた。

【調査結果②】



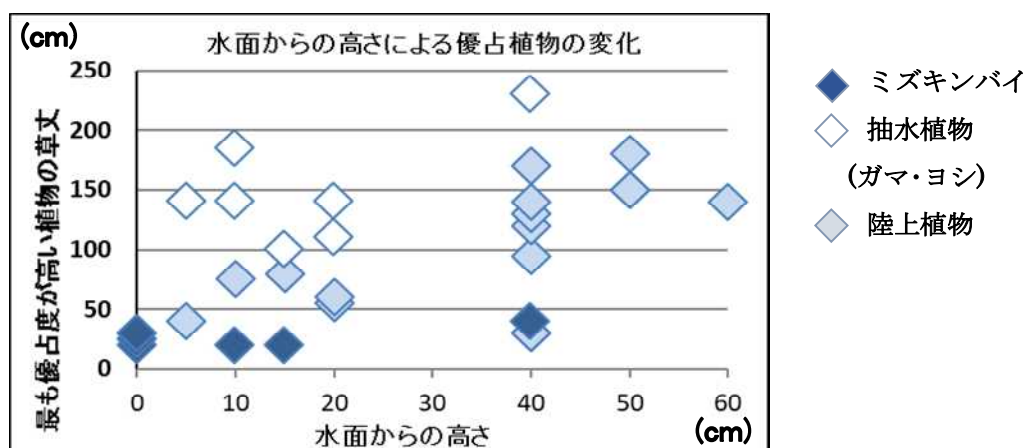
【考察②】

中州にミズキンバイが先駆植物として侵入し、それからミゾソバが侵入してくる。その後、より草丈の高いオオイヌタデやヒメガマなどが侵入してきて、陽生植物で草丈の低いミズキンバイは生育できなくなる。最終的にヨシやセイバンモロコシなどのさらに草丈の高い植物が優占する。

【調査③(10月3日)】

7月に戸塚区の方々がミズキンバイを保護するため草刈りを行った中州を10月の調査時に確認したところ、セイバンモロコシのみが生育していた。そこで、水面から高くなり乾燥した所ではミズキンバイは生育しにくいのではないかと考え、水面からの高さによって優占植物がどのように変化するかを調査した。

【調査結果③】



【考察③】

水面からの高さが 20cm以下の所ではミズキンバイと他の抽水植物が多く優占する。水面からの高さが 40cm以上になると、陸上植物が多く優占するようになる。つまりミズキンバイは水面からの高さが低い場所の方が生育しやすい。これは水面からの高さが低い場所では根が水に浸かりやすく、競合植物が侵入できない、あるいは生育しにくい環境であるためだと考えられる。

【結論と展望】

ミズキンバイが生育しやすいのは流速が緩やかで、競合植物が優占していない日当たりのよい中州の、水面からの高さが 20cm 以下と浅い所である。そのような環境を維持するため、定期的に競合植物の草刈りを行う必要がある。しかし、水面から高い所の草刈りを行っても、再び草丈の高い陸上植物が繁茂してしまい、ミズキンバイは生育できないことが分かった。そこでミズキンバイの純群落に、ミゾソバやオオイヌタデなどの陸上植物が侵入を始めている場所で定期的に除草を行い、ミズキンバイが生育しやすい環境を積極的に保全していくことが重要であると思われる。

また、8 月 12・13 日には千葉県内で生育が確認されている場所（館山市、東金市や山武郡の池や川）の調査も行った。レッドデータブックに生育確認が示されていた河川を調査したがミズキンバイの自生地を確認することはできなかった。東金市の八鶴湖と山武郡の坂田池湿性植物園では生育が確認できたが、それらは人為的に持ち込まれたものであった。河川で自生が確認できなかった理由として、今回調査した千葉県の河川では、コンクリートの護岸工事が進み浅瀬や中州が少なくなったことや、生育できそうな浅瀬ではすでに外来植物が繁茂していて、ミズキンバイが生育できる環境がなくなっていることなどが考えられる。

今回の生育地調査で得られたデータをもとに、千葉県内の河川でミズキンバイが自生している場所を探したり、再び千葉県内の河川に自生ができるように河川環境を整備し、生育範囲を復活、拡大させる具体的な方法を考えていきたいと思う。

【謝辞】

戸塚区在住の「ミズキンバイとほとるの学校」の安西鈴子さんと、戸塚区役所の方々に柏尾川の調査に同行していただきました。また柏尾川のミズキンバイの貴重な資料を提供していただきました。深く御礼申し上げます。

【参考文献】

- ・ 柏尾川の河川敷にミズキンバイ（www.townnews.co.jp/0108/i/20）
- ・ 大澤啓志・徳丸沙織・勝野武彦（2005）ミズキンバイの国内生育分布及び開放止水域における生育状況
- ・ 千葉県レッドデータブック

【感想】

場所が神奈川県ということもあり、決して十分な回数の調査を行えたとは思えない。しかし、少ない調査の中でも事前に知識をつけ、しっかりと計画を立て、得られた結果を様々な観点から考察し、結論に達することができた。

今回の千葉県の調査では、ミズキンバイの河川での自生を確認することはできなかったが、柏尾川の調査で得た結果から、自生が確認できなかった理由を考察することができた。

なぜワモンゴキブリは2種類の糞をするのか

Why American Cockroaches Have Two Types of Excrement?

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

山田隼也 山本莉央



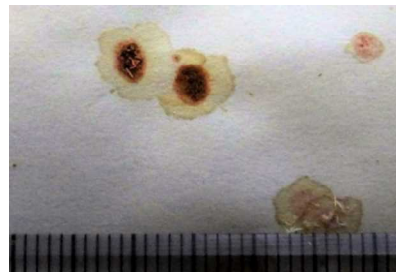
ワモンゴキブリ *Periplaneta americana*

- ・ゴキブリ科ゴキブリ属
- ・体長 40～48 mm
- ・熱帯、亜熱帯に生息する
- ・屋内性

2 種類の糞



転がる糞：コロコロとした俵状の糞



貼りつく糞：べちゃっとした壁や床に貼りついている糞

目的

ワモンゴキブリは転がる糞と貼りつく糞の 2 種類の糞を出し、その中間の糞はないことが観察により明らかになった。この 2 種類の糞が出される要因と、この 2 種類の糞の性質の違いを調べることを目的として研究を行った。

実験 1 (餌の水分量と 2 種類の糞の割合との関係)

貼りつく糞の形から、貼りつく糞は転がる糞と比べてより水分を多く含んでいることが考えられる。したがって、ワモンゴキブリが摂取する水分量が多くなると、水分を排出するために出される貼りつく糞の割合が増えると予想した。ワモンゴキブリに与える餌の含有水分量を変化させる。

1 水分量を調節した餌を 4 種類用意する。

ゼリー状(水分 60%、70%、80%)

クッキー状(乾熱機を用いて 105℃で 20 分間乾燥させる)

2 成体 50 匹にそれぞれの餌を与え、8 日間飼育する。

3 出された 2 種類の糞の割合を計測する。



ゼリー状の餌

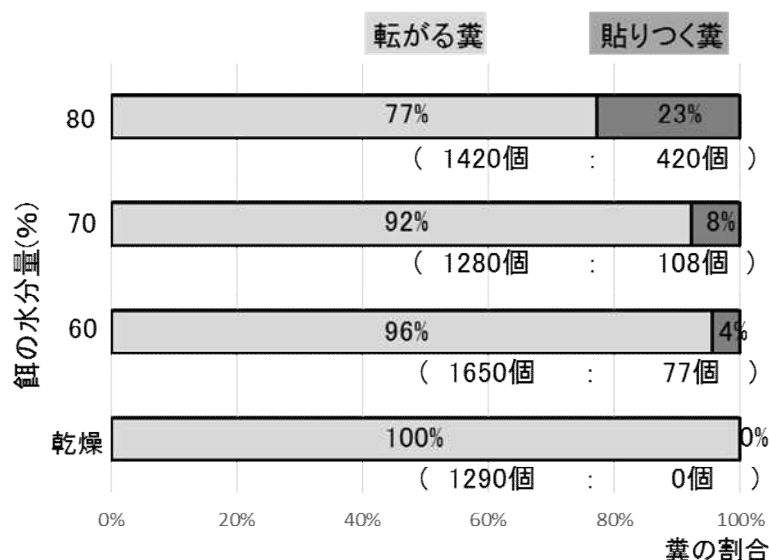


クッキー状の餌



実験に用いた容器

結果(餌の水分量)



※貼りつく糞は数が多いため、個数は重量から算出した。

餌に含まれる水分の割合が増加すると貼りつく糞の割合が増加した。

実験1では集団を用いて実験を行った。しかし、用いたゴキブリの個体差が2種類の糞の割合に大きく影響していたとすると、実験1の結果はゴキブリ一般の傾向とは言えない。そこで、個体差が実験1の結果に影響しているのかどうかを調べるために、数個体(オス1匹, メス1匹, オス2匹, メス2匹, オス1匹メス1匹)を用いて同じ条件で実験を行ったところ、個体差は見られたが実験1の結果に大きく影響するほどのものではなかった。また、この実験の結果から、雌雄の間に違いがあるように感じた。そこで、雌雄と2種類の糞の割合に関係があるのかを調べた。

実験2(雌雄と2種類の糞の割合との関係)

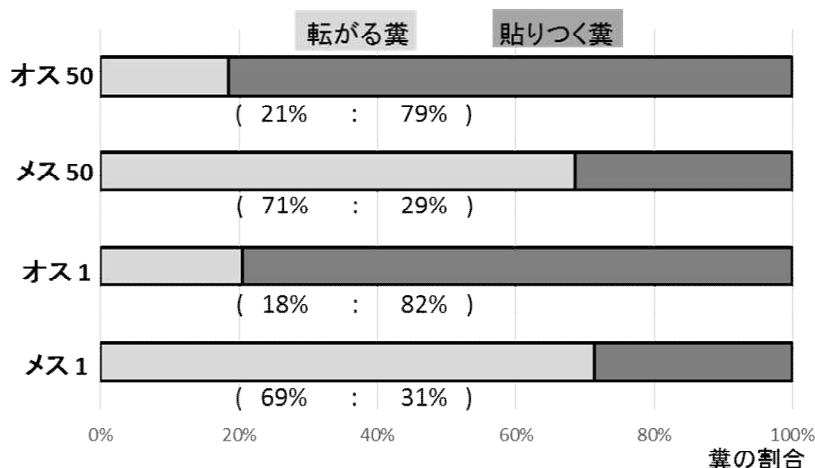
雌雄の間に2種類の糞を出す割合に違いがあるのかを調べる。

- 1 ワモンゴキブリ(オス1, メス1, オス50, メス50)に餌と水を好きなだけ与える。
- 2 この飼育環境で4日間飼育する。
- 3 出された2種類の糞の割合を計測する。



1匹での実験に用いた容器

結果(雌雄の違い)



- ・1個体でいる場合と集団でいる場合で2種類の糞の割合に大きな違いは見られなかった。
- ・メスのほうが転がる糞の割合が小さい。

考察

- ・ワモンゴキブリは、摂取した水分を貼りつく糞によって排出している。
- ・メスのほうが貼りつく糞の割合が小さい原因として、
 - ・メスは摂取する水分量が少ない
 - ・メスは卵鞘を作るために水分を使っているの2点が考えられる。
- ・集団の場合と1個体のみの場合で雌雄ともに、2種類の糞の割合についてカイ二乗検定の結果違いがあるとは言えず、これは個体密度とは関わりがない。
- ・8/1～10/28の間に実験を行ったため、気温や湿度の変化も糞の個数や2種類の糞の割合に影響している。

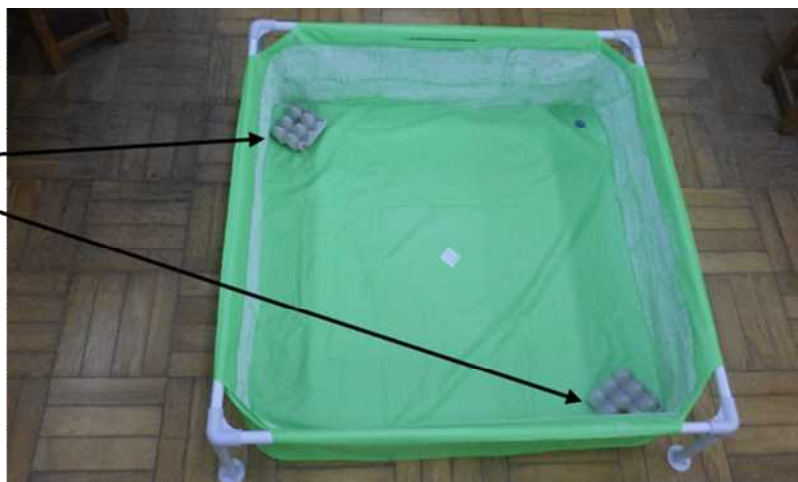
オスとメスを分けてゼリー状の餌を与えれば、摂取する餌と水の割合を強制的に調節できるため、2種類の糞の割合を調べればメスの貼りつく糞の割合が小さい理由がどちらなのかがわかる。しかし、その実験を行っても夏季と異なり貼りつく糞が見られなかった。冬季は温度を保っても湿度が低いためにゴキブリの体内から水分が自然に出て行きやすいことが考えられる。

実験3(貼りつく糞と転がる糞のゴキブリを集める能力の比較)

ゴキブリの糞には集合フェロモンという、ゴキブリを集める能力を持つフェロモンが含まれていることが知られている。転がる糞と貼りつく糞は形状が大きく異なるため、ゴキブリを集める能力にも違いがあるのではないかと考え、2種類の糞のゴキブリを集める能力を比較する実験を行った。

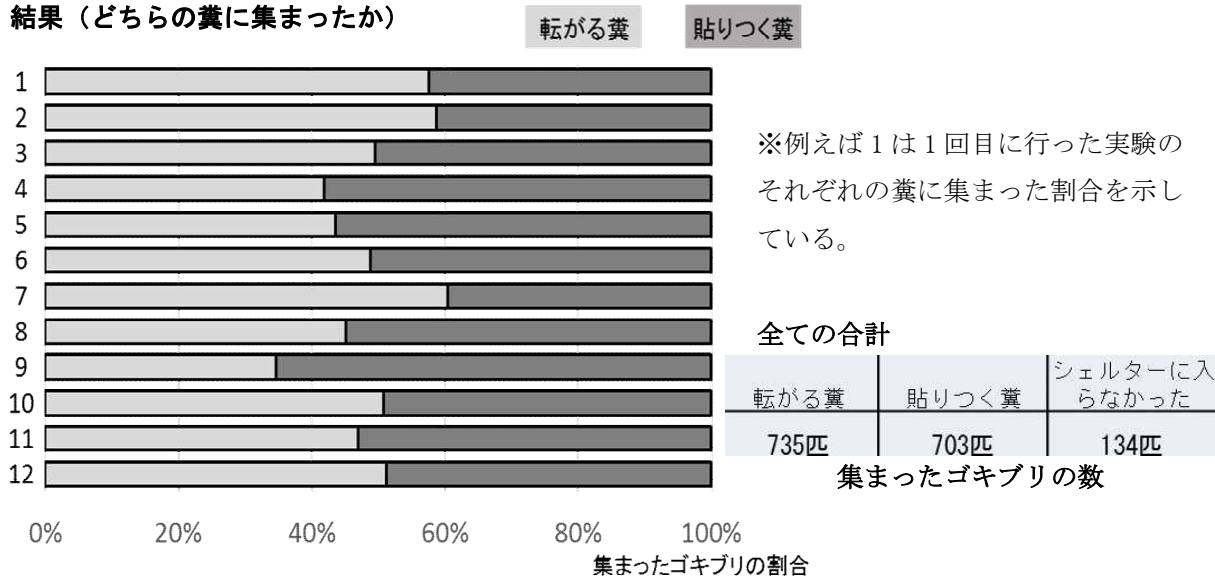
- 1 一辺が1.3メートルの正方形のビニールプールの対角線上の二つの隅に、貼りつく糞を設置したシェルターと転がる糞を設置したシェルターをそれぞれ置く。
- 2 131匹のワモンゴキブリの成体をプールの中心に放し、放し始めてから3分経過した後、それぞれのシェルターに入った個体数を測定する。
- 3 温度などの条件の違いを軽減するため、2つのシェルターの位置関係を90度ずつずらし、繰り返し実験を行う。(今回は12回行った。)

貼りつく糞または
転がる糞を設置



実験に用いたビニールプール

結果（どちらの糞に集まったか）



考察

- ・結果をすべて合計したものについてカイ二乗検定を行った結果、有意差が見られなかった。
2種類の糞にはゴキブリを集める能力の大きな違いは無いことが考えられる。
- ・しかし、この実験では、糞の量が少なかったために空気中の集合フェロモンの濃度の差が小さかったことが考えられる。また、
 - ・部屋を暖めていたため、場所による温度差があり、ゴキブリは暖かい方へ向かった
 - ・時間がたつにつれ実験を行っている空間にフェロモンが充満してきた

等のフェロモン以外のゴキブリを引き付けたり、フェロモンの出どころへ向かいづらくなったりする要因があることも考えられる。

今回は、元々このような条件の違いが生まれることを考慮して上記のように実験を繰り返し行ったため、2種類の糞にはゴキブリを集める能力の大きな違いはないと考えた。

結論

- ・ワモンゴキブリは貼りつく糞によって水分を排出している
- ・転がる糞と貼りつく糞のゴキブリを集める能力に大きな差はない

今後の課題

好きなだけ餌と水を摂取できる環境で飼育した際、メスのほうが貼りつく糞の割合が少ない理由を明らかにしたい。

また、今回の実験3では傾向は見られなかったが、糞の量を増やしたりフェロモン以外のゴキブリを引き付ける(または遠ざける)要因をできるだけ減らしたりした上で、転がる糞と貼りつく糞のワモンゴキブリを集める能力を比較する実験をさらに繰り返し行いたい。

これに有意差が見られれば、ゴキブリはフェロモンを出す量を変えるために2種類の糞を出しわけていることが考えられる。

感想

研究活動への関心が高まり、世の中で行われている研究に対しても興味を持つようになった。

間隙水圧と円磨度の関係

Dependence of the pore water pressure and roundness

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

篠崎実紗 石井咲妃

はじめに

私たちは液状化を防ぐ方法について研究しました。

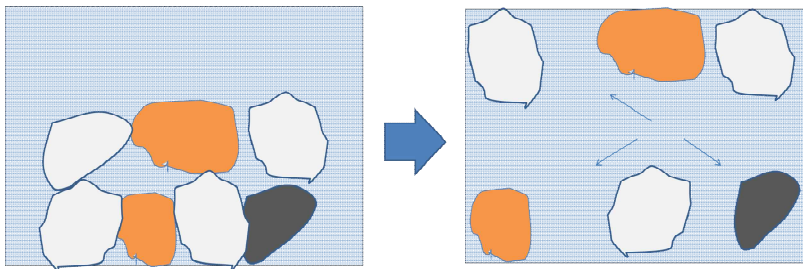
液状化というのは地震があったときに地下から地下水が湧き出てくるという現象です。

そこで今回着目したのが間隙水圧です。

間隙水圧とは、地下水の水圧のことです。

本来の地盤は砂同士が支えあっているのですが、砂がその上の重さの多くを支えています。しかし揺らすことで砂同士の結合が弱まると、水もその上の重さの多くを支えるので、水圧がより高くなります。

この水圧のより地下水が地面から出てくると液状化になります。



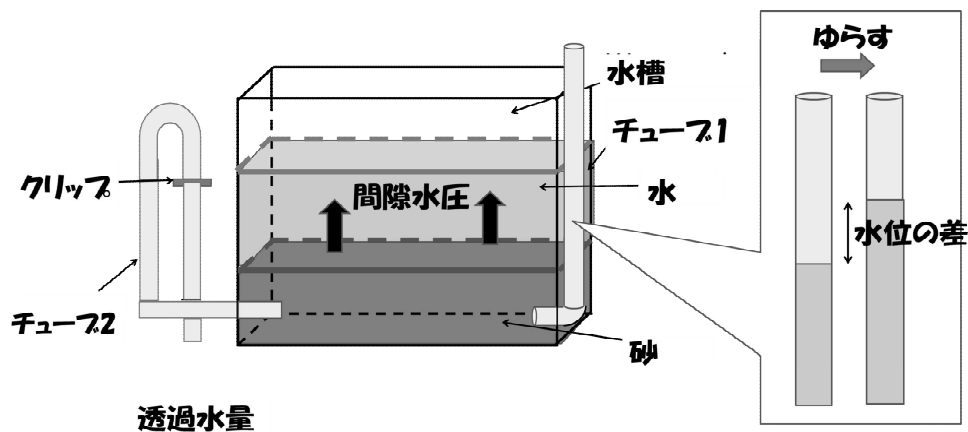
目的

実験の目的は

1. 砂の形が液状化に影響するのか。
2. 液状化を防ぐことができる土の固さを見つける。

それらを調べるために間隙水圧、土の固さ、砂粒の形を数値化することを目的としました。

装置



このタンクを使い以下の実験をしました。

円磨度とは？

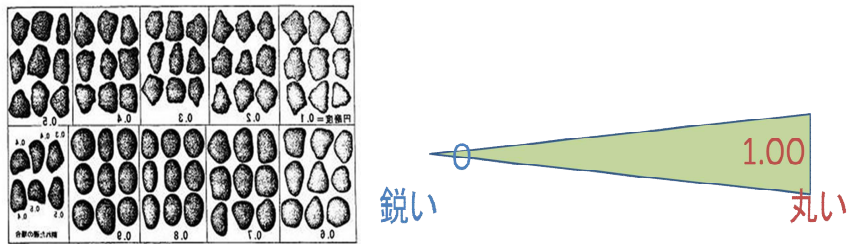
円磨度とは砂粒の丸み具合を数値化したものです。目的1の砂粒の形が液状化に影響するのかを調べるためちがう川からとってきた2種類の形の砂粒を用意しました。

その中からランダムに選んだ20粒の砂の円磨度を測定しました。

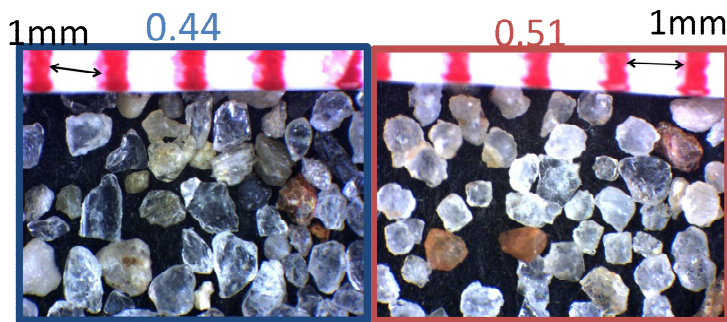
円磨度は丸い粒ほど1に近づき角ばった粒ほど0に近い値になります。

測定方法は実際の砂が円磨度印象図の砂のどれと似ているか一粒ずつ調べる方法です。

そして20粒の砂粒の円磨度をだし、それぞれの川砂20粒の円磨度の平均をだしました。



今回の実験で使った2種類の砂



方法

まず目的2の液状化を防ぐことができる土の固さを見つけるために水槽に砂をいれ水を加えてから、砂の固さをスプーンで調節します。

次に土の固さを数値化します。まず砂にかかる水圧をいつも一定にするために水面を水槽の最上部に保ちます。

次にクリップを取り、チューブ2から出てくる水の量を計測し、これを透過水量とします。

透過水量が大きければ砂が緩く、透過水量が小さければ砂が固いということになります。

つぎに地震を再現します。

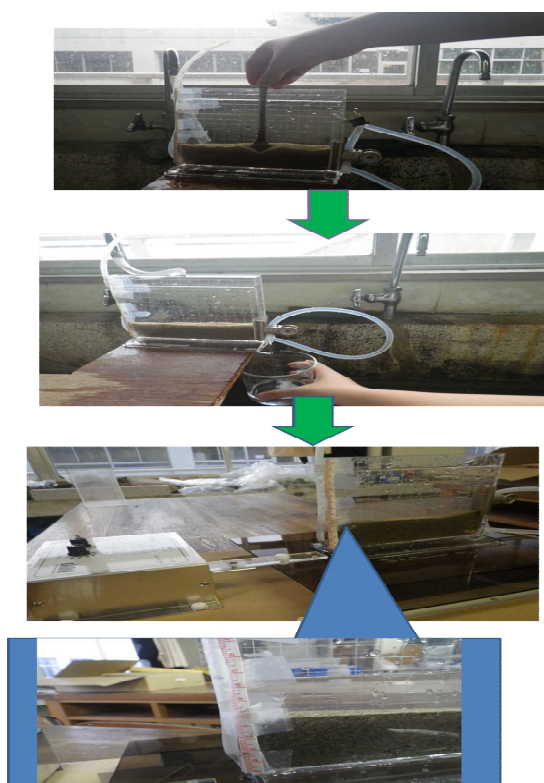
振動装置に乗せ一定の振幅と振動数、振動回数で水槽を揺らします。

これにより目的2の液状化を防ぐことができる土の固さを見つけることができます。

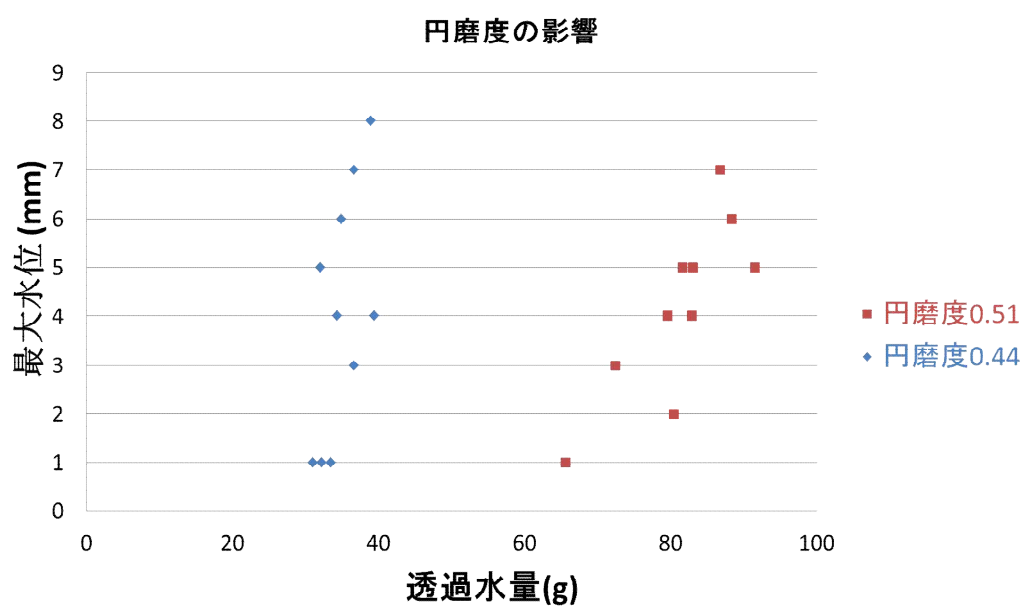
最後に間隙水圧を数値化します。

チューブ1の揺らす前の水位と揺らした時の最大水位との水位の変化が何mmかを測りました。

間隙水圧は水圧なのでチューブ1の水位の変化が大きいほど間隙水圧も高いです。



結果



1. 円磨度 0.44 と 0.51 の砂は異なる透過水量で水位の差がおおきくなりました。
2. 円磨度 0.44 は実験によって透過水量があまり変えられなかったです。
3. 円磨度 0.44 も 0.51 も、透過水量が大きいほうが水位の差が大きかったです。

考察

1 より円磨度 0.51 のグラフは、透過水量が 65.57g で小さいときは最大水位も 1mm と低いため、円磨度 0.44 の透過水量がすべて約 30g～40g であることから、もし透過水量だけが液状化に影響するならば円磨度 0.44 のグラフは最大水位がほぼ 0 になると考えました。しかし円磨度 0.44 のグラフも最大水位が非常によく上がったことから、円磨度 0.44 という鋭い砂の性質によって最大水位が高くなったと思いました。

→ 1 より粒の形が液状化に影響することがわかりました。

2 のように角ばった砂粒の透過水量が、丸い砂粒より小さいことについては、鋭い砂粒が丸い砂粒よりも砂と砂の間の水の部分にも入り込みやすいため、砂が密な状態になり、透過水量が小さくなると考えました。そして、鋭い砂粒であるほど砂が密な状態になると考えると、鋭い砂粒は砂の疎密を調節する前から砂が密な状態になり、透過水量が 30g～40g 付近の砂の状態しかつくることができなかったと考えることができます。

→ 2 より角ばった砂粒の土は固くなりやすいと考えました。

3 より土が固いほど液状化しにくいということになります。

結論

- ・砂の形によって液状化に影響がありました。
- ・土が固いほど液状化しにくいです。
- ・間隙水圧、土の固さ、砂粒の形を数値化できました。

今後の課題

円磨度 1.0 と 0.1 の砂についても同様の実験を行いたいです。

角ばった砂粒の土が固くなりやすい事の原因を調べていきたいです。

参考文献

Krumbein (1941)

模擬火成岩作成実験における冷却時間と結晶の状態の関係

The Relationship between Cooling Time and State of Crystal in The Experiment of Forming Artificial Igneous Rock

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
大久保 敦也 井上 大裕

導入

先行研究①「マグマの冷却速度と火山岩の粒度の関係」では、天然のサンプルが融解した 8 時間という短い時間で研究を行っていた。また、そのせいで結晶がかなり微細な物になってしまっていた。

先行研究②「模擬火成岩生成における化学組成の及ぼす影響」では、火山岩融解に関するデータが乏しく、玄武岩サンプルの融解には成功したという結果しか残っていなかった。

そこで、成分、方法を変えて人工的に火成岩の成分を配合して模擬火成岩を作成することを考えた。

目的

人工的に火成岩を生成する。冷却速度と結晶の状態の関係について調べる。

- ・ 乳鉢 ・ 乳棒 ・ 電気炉（マッフル炉） ・ 偏光顕微鏡 ・ 研磨剤 ・ スライドガラス
- ・ 接着剤 ・ 薬品 ・ アルミナるつぼ

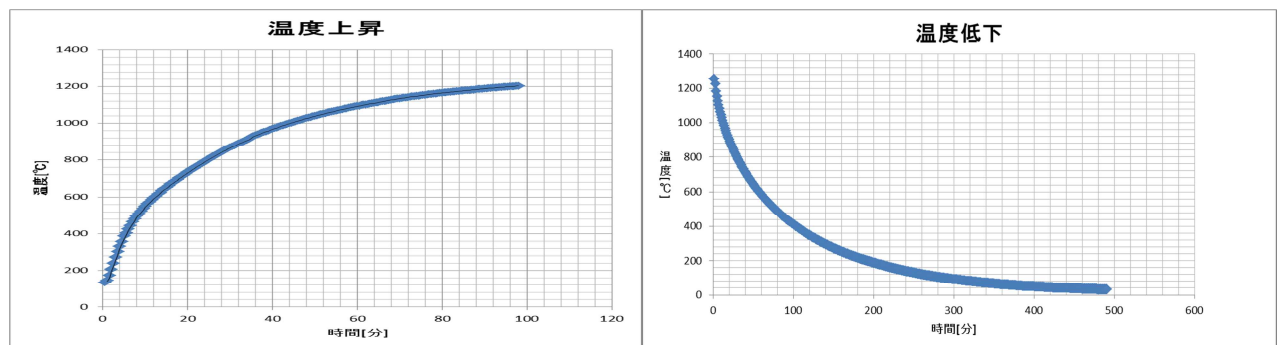
《予備実験》

マッフル炉の性能を調べる。

方法

マッフル炉を空焚きで、本実験と同じ条件（1280℃、24H加熱後、徐冷）で起動させ、温度計部分をデジタルカメラのインターバル撮影機能を用いて1分毎に撮影して、温度変化のグラフを作成する。

結果



《本実験》

火成岩の作成を試みる。

仮説

- ① 冷却時間が長いほど、結晶が出来やすい。また、結晶がより大きくなる。
- ② 水を含んでいないため、硬くてもろい岩石が出来る。

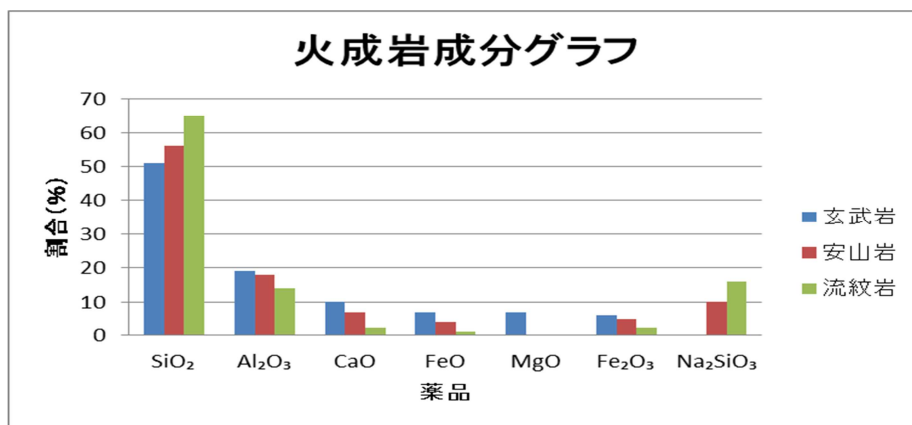
方法

- ① 火成岩の成分にあった薬品を用意する。(8 g)
- ② 用意した薬品を乳鉢と乳棒を使って混ぜる。その後、アルミナるつぼに移す。
- ③ ②の試薬を電気炉(マッフル炉)を用いて任意の時間・温度で加熱・冷却する。(今回は、1280℃、24H加熱し、※急冷、徐冷の2つの方法で行った。)
- ④ できたサンプルを肉眼で観察し、融解に成功していたら、そのサンプルを薄く削り、プレパラートを作成し、偏光顕微鏡を用いて観察する(顕微鏡の写真はすべて100倍)。
- ⑤ ④のプレパラートサンプルを天然のサンプルと比較して、結晶の形や数から完成度を比較する。

※急冷、徐冷に関して

急冷とは、加熱した後冷却に関して、何も操作を加えず放置して冷却したものをいう。

徐冷とは、加熱したのち冷却に関しても操作を加えて、急冷時と比べて冷却時間を延ばすことで、冷却時間による結晶の状態への影響を調べるために行ったものをいう。今回は、毎時間10℃のペースで冷却したのち、1000℃を切ったところで放置して冷却した。



結果

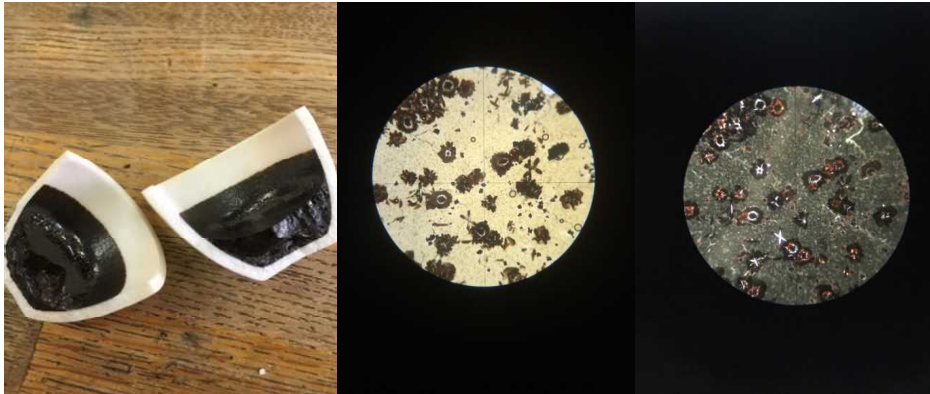
■玄武岩 (急冷)

- ・完全に融解した。
- ・るつぼとサンプルの間に癒着が見られた。
- ・色は黒かった。
- ・針状の結晶が見られた。
- ・大部分がガラス質で、結晶がほとんど見られなかった。
- ・気泡が所々に見られた。
- ・薬品の溶け残りが見られた。

肉眼

開放ニコル

直交ニコル



■安山岩（急冷）

- ・完全に融解した。
- ・るつぽとサンプルの間に癒着が見られた。
- ・色は黒く、光沢が見られた。
- ・もやがかかったような部分があった。
- ・結晶が玄武岩サンプルよりも多く存在していた。
- ・針状の結晶が見られた。
- ・薬品の溶け残りが見られた。

肉眼

開放ニコル

直交ニコル



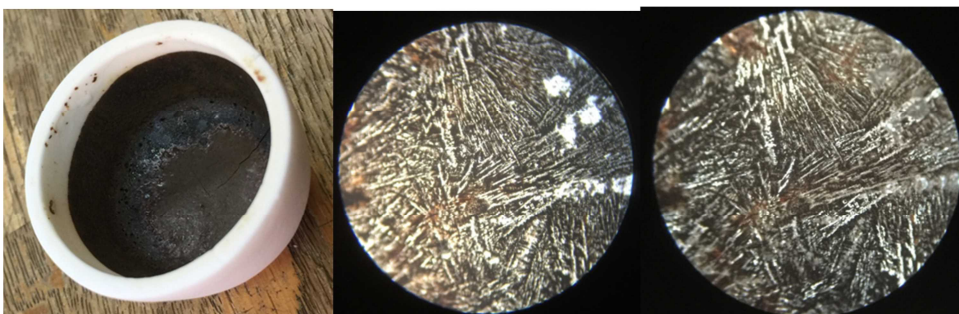
■玄武岩（徐冷）

- ・肉眼では、急冷とほとんど変わっていなかった。
- ・顕微鏡で見ると、結晶の数、大きさともに徐冷よりも増加していた。

肉眼

開放ニコル

直交ニコル



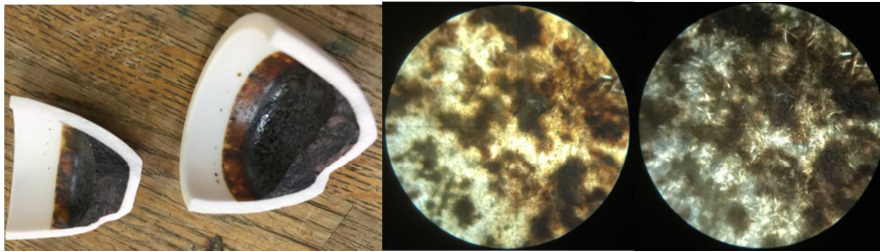
■安山岩（徐冷）

- ・肉眼では、玄武岩と同様にほとんど変わっていなかった。
- ・顕微鏡で見ると、急冷と同じくもやのようなものがかかっていたが、結晶の数は増えていた。

肉眼

開放ニコル

直交ニコル



■流紋岩（急冷、徐冷ともに）

- ・一部融解した。
- ・凝縮しているだけで、るつぽとサンプルの間に癒着が見られなかった。
- ・色は表面に一部赤い部分が見られたが、ほとんど黒かった。おそらく、酸化鉄（Ⅲ）の溶け残りと思われる。

肉眼（急冷）

（徐冷）



考察

■結晶について

- ・形が針状
- ・干渉色が見られなかった。→無色鉱物である。

⇒結晶は斜長石

■完成度について

- ・結晶が小さすぎる。
- ・結晶が少なくガラス質の部分が多かった。

⇒完成度は低く、密度が低いことからさらなる改善が必要。

■冷却時間が与える影響について

- ・徐冷のほうが結晶の数が増えていた。
- ・玄武岩に関しては、大きさも増大していた。

⇒冷却時間が長いと、結晶がより多く、大きく生成されることが確認できた。

結論

生成はできたが、完成度が低い人工物となった。

今後の課題

- ・玄武岩と安山岩は溶けたが、流紋岩だけが溶けないため、その原因を探る。
→化学組成が結晶に与える影響について調べる必要がある。
- ・この実験の再現性が確保できなかった。特に、夏場に実験が成功しなかった。
→空気中の水分が試薬の表面の化学組成を変えている可能性があるから、試薬が含む水分量が実験に与える影響を調べる必要がある。
- ・実際の生成環境下になるべく近づけて実験を行う必要がある。特に、気圧条件、水分量、冷却速度など

まとめ

- ・この研究を通じて思ったことは、
自分の頭で考えて、仮説を立てること
記録を残し、考察を深めること
の2つの重要性である。

そして、この課題研究を通して自分が得られたものは、思考力である。それは、未熟ながらも上記の2つのことをやってきたからであり、それが今自分を本当に助けてくれている。今後も、粘り強く考えて、どんな問題にも対応できるように努力したい。

参考文献

鉱物・岩石学入門 W・Gアーンスト著 牛来 正夫訳

寒天をモデルに用いた免震の研究

Study of seismic by using agar in model

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

高橋大樹 大久保歩

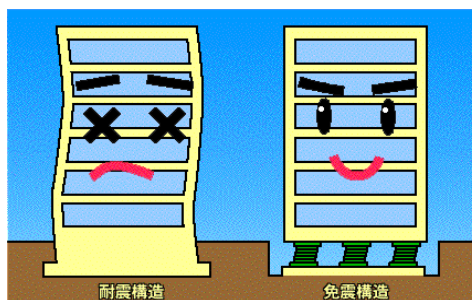
《研究の動機》

これまで、直方体あるいは立方体の寒天を建物に見立て、振動装置を用いて振動させたときの寒天の揺れ方により地震による建物の揺れ方を調べるという目的で研究を行ってきた。しかし、その研究はいわゆる基礎実験であり、直接的に世の中の役に立つような研究に移行したいと思いこの研究を行うに至った。(寒天を選んだ理由については最後に述べる。)

《研究目的》

地震に対する建物の構造の一つである免震構造の施された建物が、地震の振動数などの条件を変えるとどのように揺れ方が変化するか、また、免震構造の施されていない建物と比較してどのような違いがあるかを、これまでと同様に寒天を用いて実験し明らかにする。

免震構造とは、建物の基礎の部分に免震装置を設置し、地盤と切り離すことで建物に地震の揺れを直接伝えない構造を指し、地震の揺れに耐えることを考える耐震構造とは全く別の考え方である。実際の免震構造では、建物と地面の間にゴムを用いて建物に直接揺れが伝わらないようにしたり、ボールベアリングを用いて建物が地面の上を滑るかのような構造にして揺れを抑えるという手法がとられる。今回行った研究において最も近いのは、建物が滑るかのようにして揺れを抑える方法である。



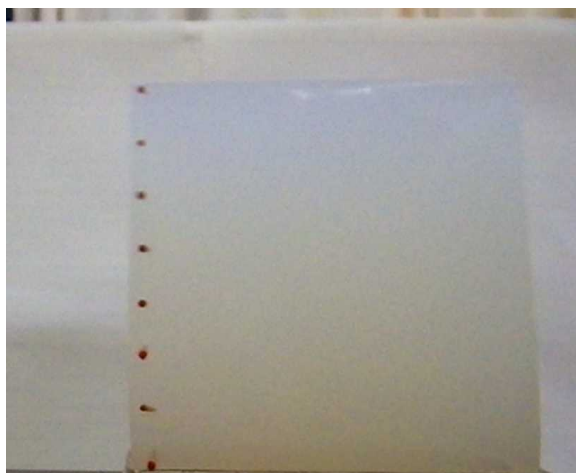
画像はwww.jssi.or.jp/menshin/m_kenchiku.htmlより

《研究方法》

高さ 10.5cm、底面の一边の長さ 9.5cm の直方体の寒天を作成する。その寒天の左端に次ページの写真のように 8 個の印をつけて同じく次ページの写真にある振動装置に載せ、その寒天を建物、装置を地面とみなして振動させる。このとき振動装置の振動数を変えていき、寒天の振動する様子をビデオカメラで動画として撮影し、動画解析ソフトを用いて印ごとに解析することで寒天の動きを調べた。

今回の研究においては、振動装置に寒天を固定したものを免震構造の施されていない建物とし、振動装置に寒天を固定せず振動装置の上を滑ることができるようにしたものを免震構造の施された建物とした。なお、振動装置の起こす振動は横向きなので、横向きに揺れる地震とみなす。

寒天と印



振動装置

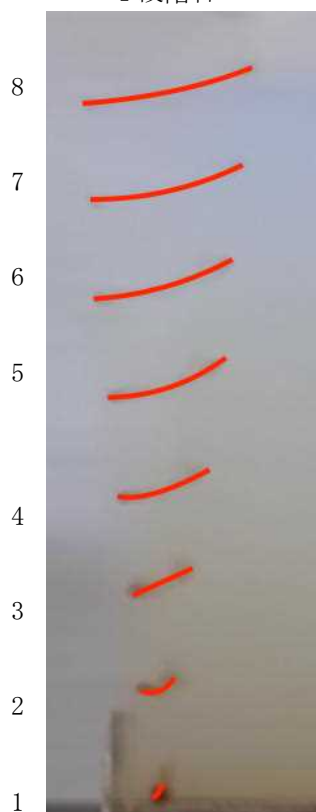


《研究結果》

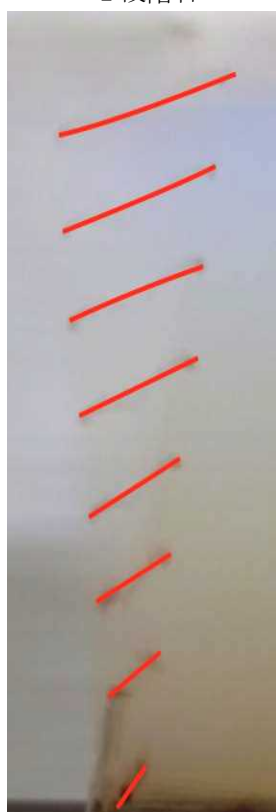
以下の写真は、寒天につけた印の動きを追った軌跡である。それぞれの写真の上には振動装置の振動数(6段階可変)、横に示すのは下から何番目の印かを表す数である。また、これ以降、寒天を振動装置に固定した、免震構造の施されていない建物を想定した方を「固定」、寒天を振動装置に固定していない、免震構造の施されていない建物を想定した方を「開放」と呼ぶ。

・固定

1段階目

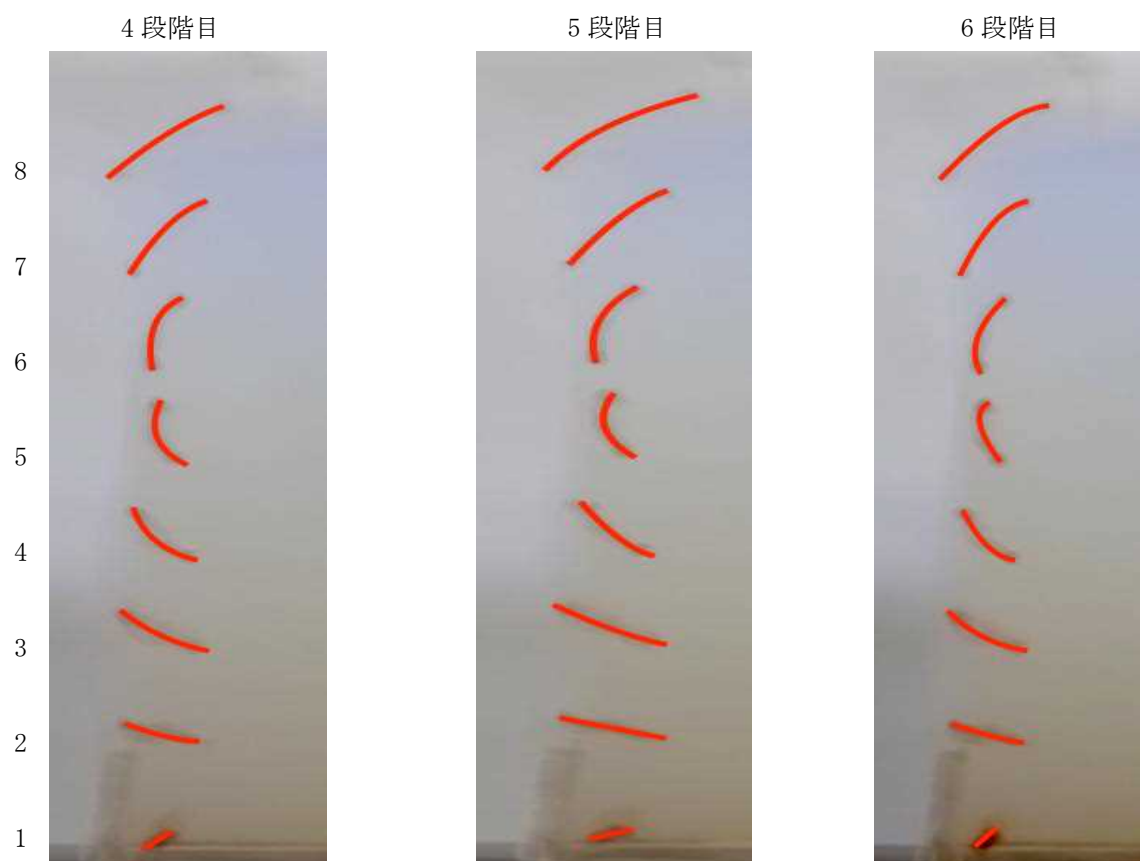


2段階目



3段階目





・開放はスペースの関係上画像を省略

固定と開放はどちらもよく似た揺れ方をした。大きく分けると 1, 2 段階目、4, 5, 6 段階目の 2 通りに揺れ方が分かれた(3 段階目は例外)。1, 2 段階目は上に行くほど大きく揺れ、4, 5, 6 段階目は上に行くと、一旦大きく揺れて小さくなり、また大きく揺れているということが読み取れる。3 段階目は、印の軌跡が円を描く他とは違った揺れ方をした。

次の表は、印ごとの振幅の大きさを測定したものである。単位は cm で、高さの数は軌跡の画像と対応している。開放の低い位置の印の結果がないのは、動画において印がよく見えなかったためである。

固定		振動装置の振動数					
		1段階目	2段階目	3段階目	4段階目	5段階目	6段階目
寒天の高さ	8	3.31	2.34	1.58	1.67	1.54	1.77
	7	3.00	2.15	1.32	1.37	1.25	1.35
	6	2.69	1.92	1.17	1.17	1.01	1.08
	5	2.34	1.59	0.92	0.94	0.81	0.91
	4	1.88	1.35	0.65	0.93	0.91	0.93
	3	1.48	0.98	0.53	0.92	0.90	1.04
	2	1.04	0.63	0.31	0.79	0.58	0.74
	1	0.67	0.41	0.32	0.17	0.24	0.40

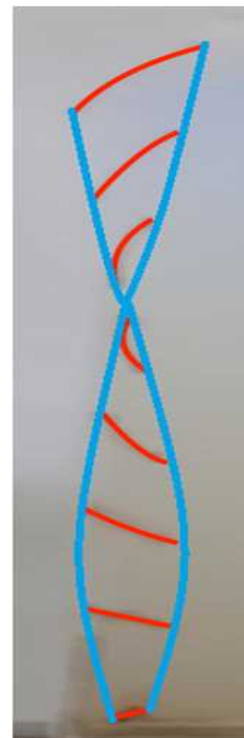
開放		振動装置の振動数					
		1段階目	2段階目	3段階目	4段階目	5段階目	6段階目
寒天の高さ	8	3.52	2.20	1.52	1.70	1.72	1.84
	7	3.25	1.83	1.23	1.33	1.25	1.32
	6	2.98	1.64	1.10	1.10	0.85	0.92
	5	2.77	1.33	0.93	0.86	0.76	0.74
	4	2.29	1.12	0.68	0.46	0.58	0.65
	3	1.83	0.84	0.67	0.66	0.61	0.72
	2		0.70	0.54	0.54	0.60	0.43
	1						

固定の結果と開放の結果を、同じ振動数のときの同じ高さの印同士で比較すると、
 固定<開放…15 開放<固定…25
 で、全体的に見ると開放の方が揺れが小さかったものの、想定していたよりもその差は小さかった。

《考察》

・軌跡について

固定の 1, 2 段階目の振動数のときの結果をみると、下の左図に示すような、地面を固定端としたときの基本振動をしていることがわかる。また 4, 5, 6 段階目の振動数のときは、下の右図に示すような 3 倍振動をしていることがわかる。3 段階目については、基本振動と 3 倍振動のどちらにもなれなかったため不可解な揺れ方をしたと考えられる。



開放も同じような揺れ方をしたが、開放は接地面が自由に動けるので自由端になるはずである。この矛盾から、実験自体がうまくいっていなかった可能性が生じた。

- ・振幅について

開放の方が振幅が小さかったので、免震構造を施した方が揺れが小さくなることは確認できたが、結果に書いた通り、固定と開放の差が少なかった。このことから、先ほど出た実験方法の信頼性に対する疑問が深まることになった。

《結論》

建物の接地面を滑るようにしただけで、揺れを小さくできることが確認できた。しかし、今回の方法では思うような正確な結果が出なかったため、より深い実験や考察に取りかかることはできなかった。

《展望》

- ・より正確な結果を得られる実験方法を考える必要がある。
- ・今回用いた振動装置が、振動させたい振動数を設定して振動させることができず、段階的にしか振動数を変えられないものだった。また、その間隔も一定ではなかった。そのため、より正確な実験を行うためには、装置を自作するなどして自由に振動数を設定できる装置を用意する必要がある。

※寒天を用いた理由について

《研究の動機》の項目に示した通り、以前行っていた研究においても寒天を使用していたので、そのまま使用したという形である。そのためそもそもなぜ以前の実験で寒天を使用していたのかという理由をここに記す。

- ・自由に高さや幅、あるいは硬さを変えることができる。

寒天を作る際の型さえ準備できれば、高さや幅など大きさに関わる項目は自由に変更できる。また、寒天の粉末と水の量を調整して濃度を変えることで、硬さも自由に変更可能である。今回はこれらの利点を生かす機会はなかったものの、以前の研究においては活躍した。

- ・弾力性があり、モデル実験として使いやすい。

実際に建物に使われる鉄筋コンクリートや木材などでこのような小型化した実験をすると、弾性力が小さいためにどのような揺れ方をしているかが非常にわかりにくい。その点寒天であれば動きがわかりやすいのである。

- ・安価である。

前項であげたような、実際の建物に使われる素材は高価である。また、寒天によく似たゼラチンは、前実験のさらに前に使っていたこともあるが、寒天のほうが使用量が少ないために寒天の方が安価であった。

大気が夕日の色に与える影響

The influence of the atmosphere that gives the color of the setting sun

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

大山 智弘 吉雄 忠行

目的

大気中のレイリー散乱とミー散乱を起こす物質の量によって、夕日のスペクトルがどのように変化するかを明らかにする。また、今回はレイリー散乱を起こす物質と夕日のスペクトルの関係性を明らかにするための実験をした。

レイリー散乱とは、光の波長の $1/10$ 以下の大きさの粒子による散乱のことで、短い波長の光から散乱していく。空が青いのはこれが原因である。

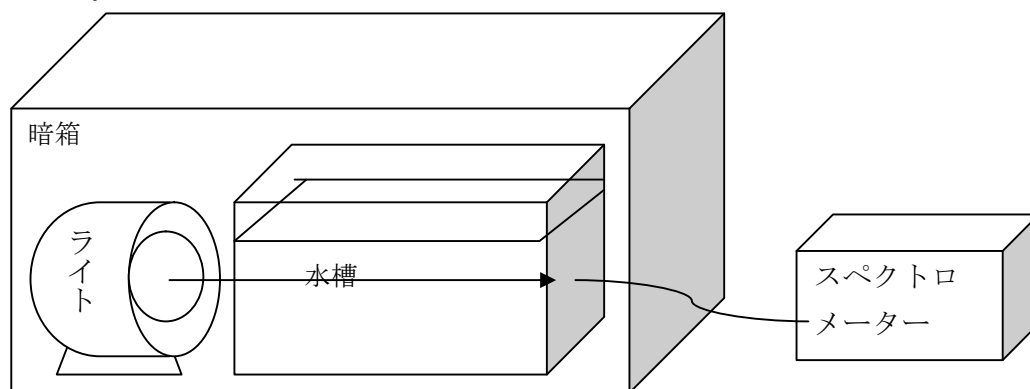
ミー散乱とは、光の波長と同じぐらいの大きさの粒子による散乱のことで、可視光全体が等しく散乱される。雲が白いのはこれが原因である。

方法

下図のように実験装置を組み立てる。水槽の中には 1000mL の水にゼラチンを 5g 溶かした溶液を入れる。エタノールに硫黄をできるだけ溶かしたもの ($9.2 \times 10^{-4} \text{ mol/mL}$) を 2mL ずつ水槽に加えていく。そのときそれぞれで水槽を通ったハロゲンライトの光をスペクトロメーターで測定する。このとき加えた硫黄のコロイドによってレイリー散乱がおこされる。

ゼラチンは後に加える硫黄のコロイドが固まり、沈殿するのを防ぐために入れた。

硫黄を溶かす溶媒がエタノールである理由は、溶液を水槽に滴下したときエタノールが硫黄の分子にまわりつき水をはじくことによって、硫黄が分子の状態で水槽内に存在していただけるようになるからである。



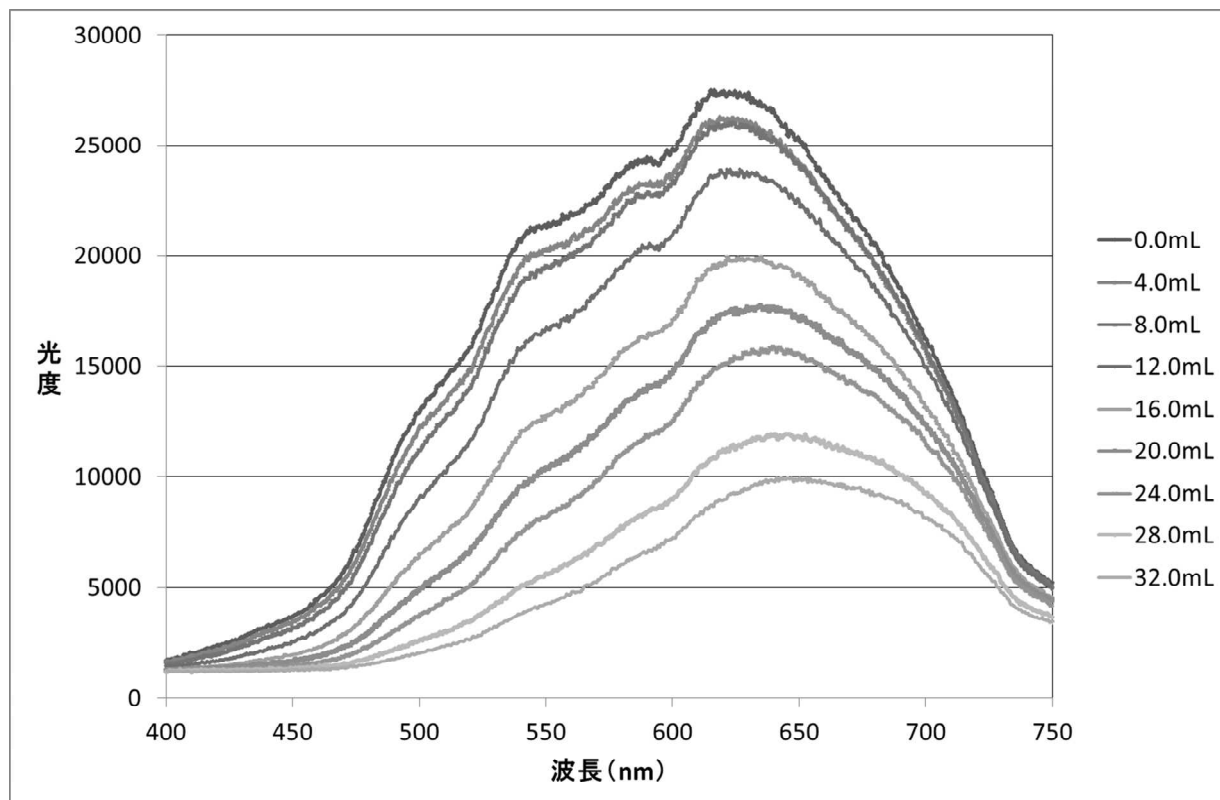
実験器具

- ・ライト (ハロゲンライト)
- ・水槽 ($5.0 \times 30.3 \times 12.2 \text{ cm}^3$)
- ・暗箱 (段ボール)
- ・スペクトロメーター

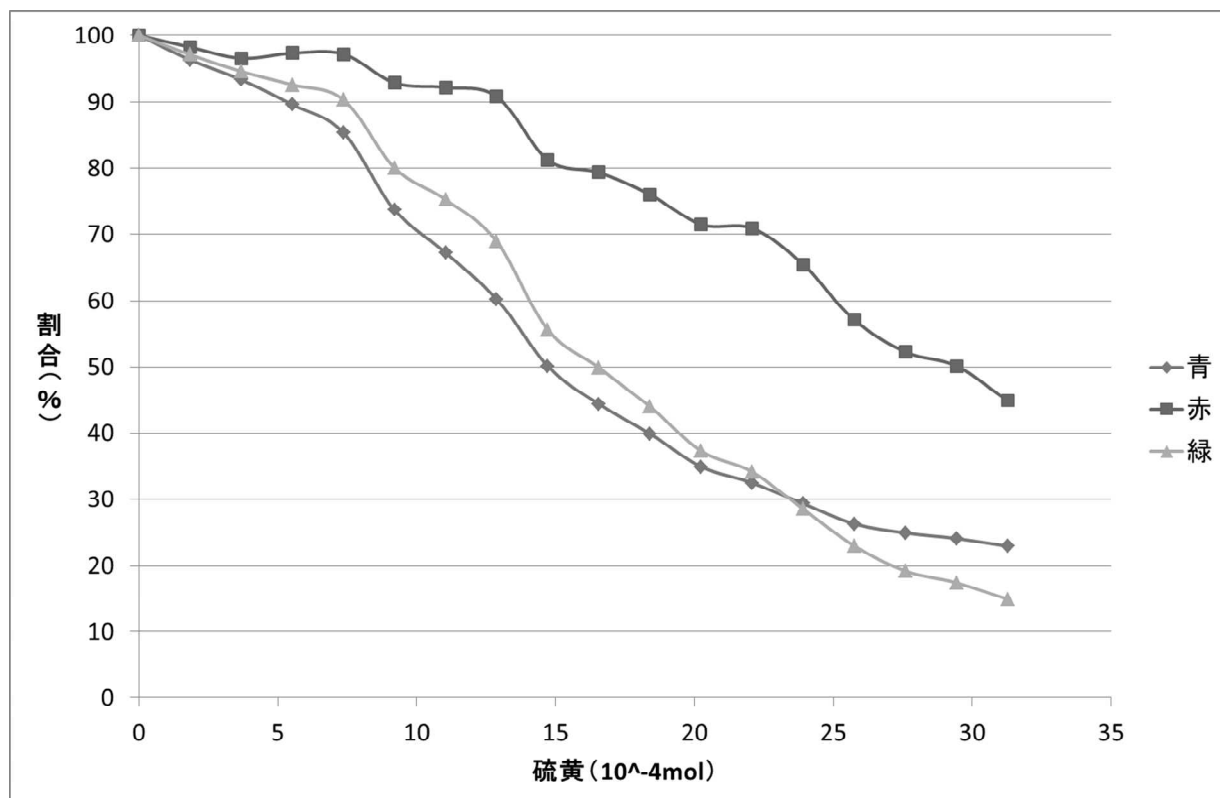
今回使用するライトを簡易スペクトル計で調べた結果、輝線などは見られなかった。

結果

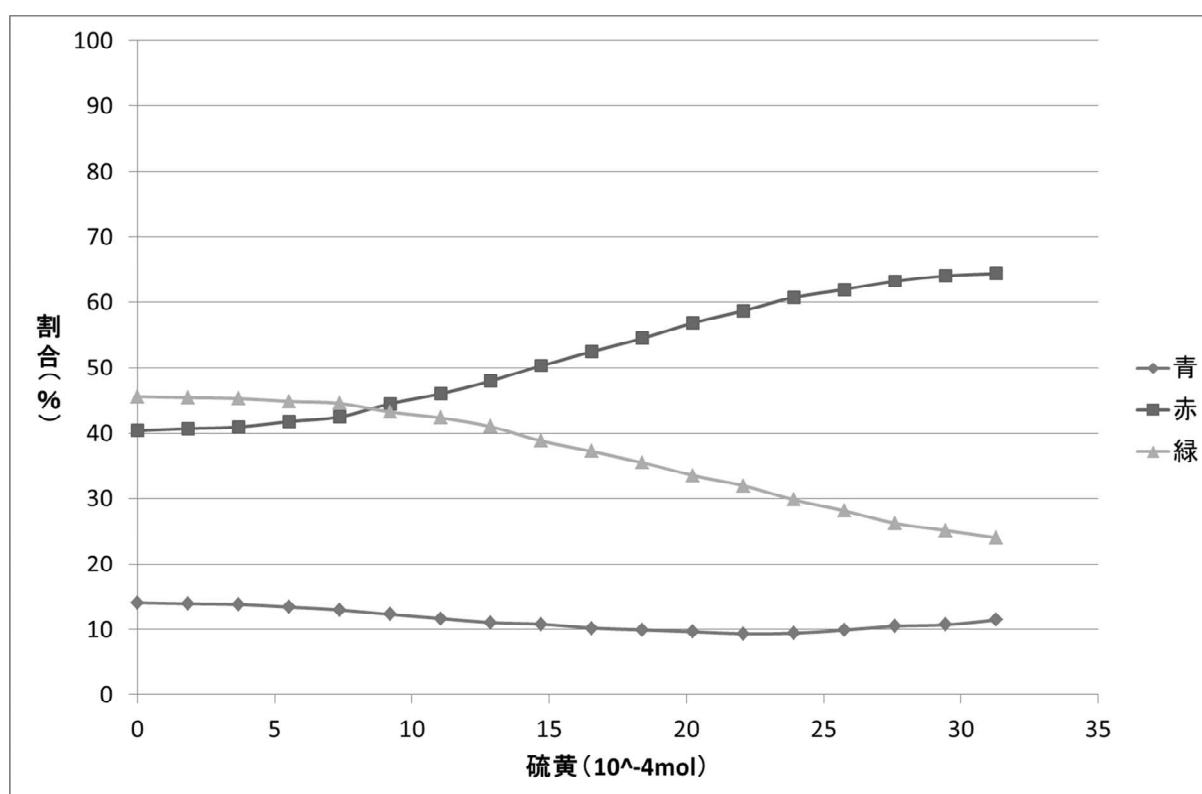
グラフ①



グラフ②



グラフ③



グラフ①は 2mL ずつ硫黄の溶液を加えていったデータを 4mL ずつ取り出しグラフにしたものである。グラフ②は実験で得られたデータを波長の長さで青（468.12～471.88nm）、緑（528.07～531.74nm）、赤（698.18～701.57nm）と分け、硫黄が 0mol の時のそれぞれの光度を 100%とする百分率で表したものである。

グラフ③は実験で得られたデータをグラフ②と同様に分類し、硫黄を加えた量ごとに青、赤、緑の光度の合計を全体として、それぞれとの割合を百分率で出したものである。

考察

3つのグラフより、夕日の色が赤くなっていくのは夕日の中の赤色の波長が増えるのではなく、赤色の波長がその他の色の波長よりも光度の減少率が小さいことによるものだとわかった。つまり、ハロゲンライトに元から含まれている光と、模擬大気を通った後の光で、赤、青、緑色の光度の割合が変化するとともに目に見えてくる色が変わっていると考えられる。グラフ②、③からわかる通り、赤色の光度の減少率が青、緑色の光度の減少率よりも小さかったため、全体を見ると赤色の波長の割合が大きくなった。そのため、模擬大気を通ったライトの光は硫黄が増えていくにつれてだんだんと赤くなっていったのだと思われる。

結論

今回の実験でわかったことは、大気中のレイリー散乱を起こす物質が増えるつまり、光が通る大気の距離が長くなるにつれて光の散乱が多くなるため光全体として光度が小さくなる。しかし、特に赤色系の波長が長い光はそれ以外の比較的波長の短い光に比べて散乱する量が少ないため、全体としてだんだんと赤色の割合が増えていく。それによって、夕日の色は赤くなっていくのだという結論に至った。

今後の課題

今回はレイリー散乱をおこす実験しかできていないので、これからは生クリーム脂肪球を使ってミー散乱をおこす実験も進めていきたい。また、レイリー散乱とミー散乱を組み合わせ、実際の大气に近い状態を作り出し、日によって夕日の色が変わる理由を散乱の割合を変えることで明らかにする実験も行いたい。

参考文献

「カラー図解でわかる光と色の仕組み」 (出版 softbank creative) p14, 15

著 福江純・栗野諭美・田島由起子

固体表面を上昇する液体の運動

Movement of the liquid to rise a solid surface

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

鍋田 悠人

はじめに

私は毛細管現象を用いた岩石の識別方法を研究していた。しかし、岩石による大きな違いを見出すことはできなかった。私はこのことの原因を液体が岩石の内部ではなく表面をつたっているためではないかと考えた。そこで、ガラスを用いて実験を行い、液体が固体の表面を上昇するのかということを調べたところ、液体は固体表面を上昇していくということがわかった。そこで、この表面現象を研究していくことにした。

目的

表面現象について、液体が上昇しやすい条件（表面の粗さなど）を明らかにする。

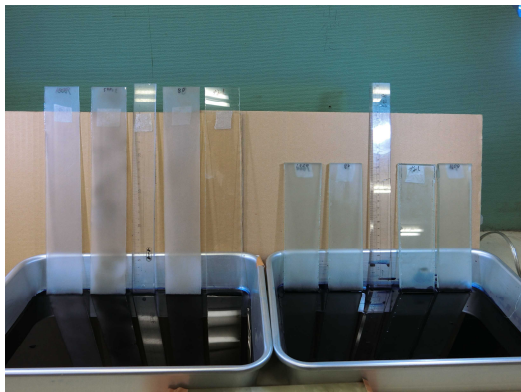
方法

使用したもの

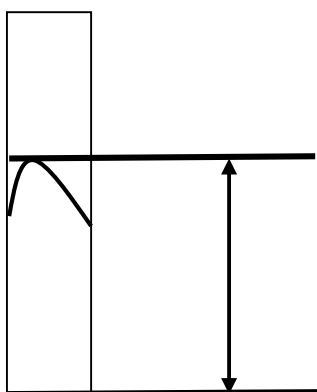
- PILOT インク ブルーブラック
- ガラス
- 変性ポリエチレンテレフタレート
- 研磨剤
- バット
- カメラ

実験 1

1. ガラス、変性ポリエチレンテレフタラートをそれぞれ幅 5cm に切断する。
2. 切断したものをそれぞれ、80、500、1000、の研磨剤で研磨する。
3. バットにインクを注ぎ下の写真のようにガラス、変性ポリエチレンテレフタラートをつける。
4. インターバル撮影で経過を観察し、インクが上昇した長さを測定する。



上昇した長さは下の図のように最も長く上昇した長さとする。



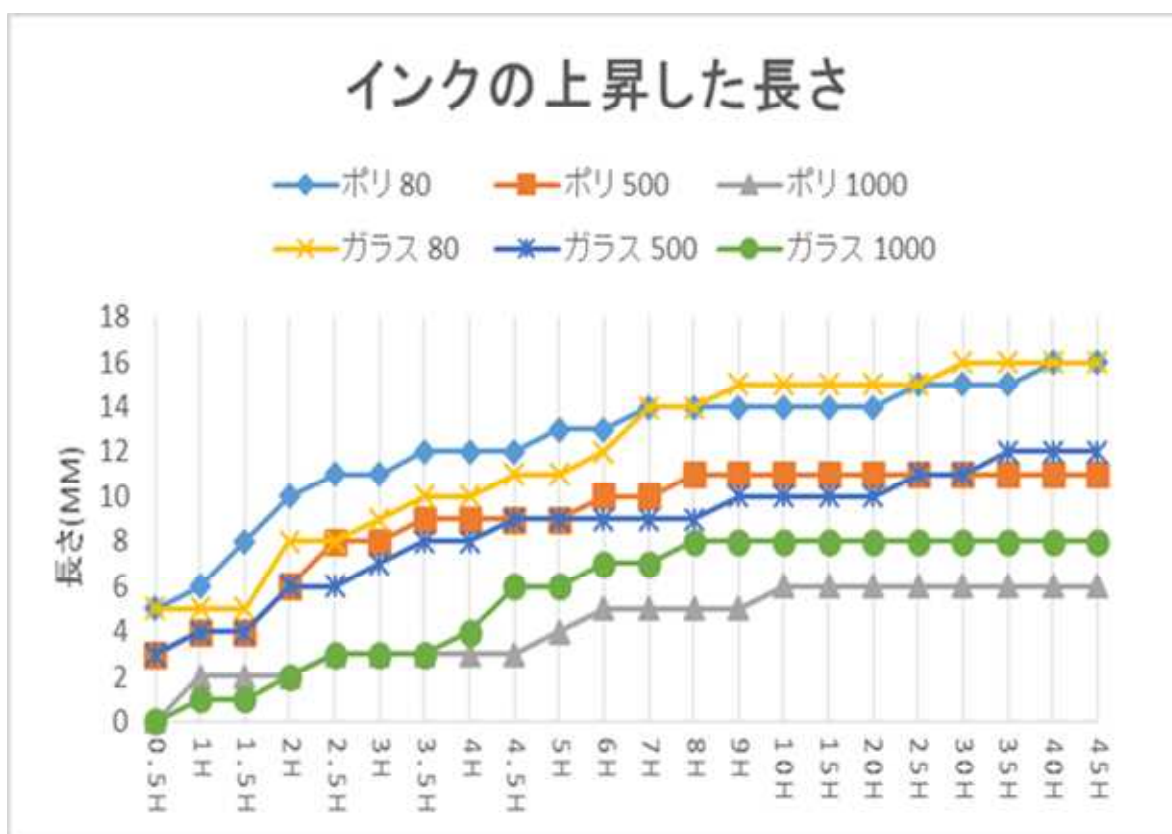
実験 2

実験 1 で使用したものを電子顕微鏡で観察する。

結果

実験 1

時間ごとの上昇した長さは下のとおりである。



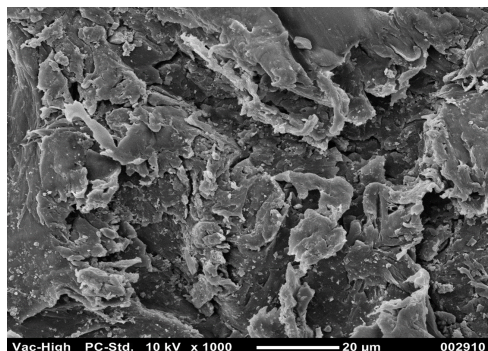
最終的な上昇した長さは以下のとおりである。

	ガラス	変性ポリエチレンテレフタレート
研磨剤 80	16mm	16mm
研磨剤 500	12mm	11mm
研磨剤 1000	8mm	6mm

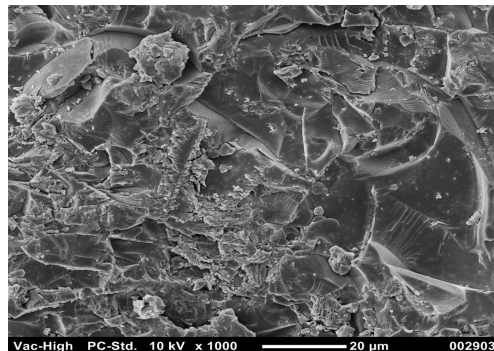
実験 2

得られた写真は以下のとおりである。

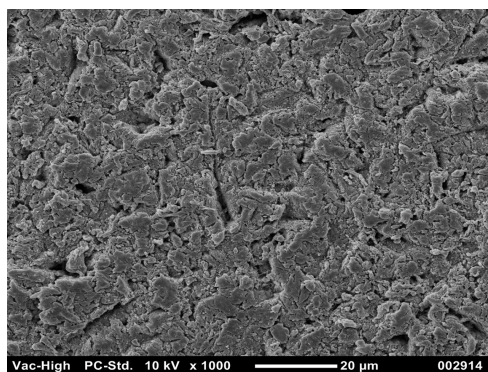
PET 80



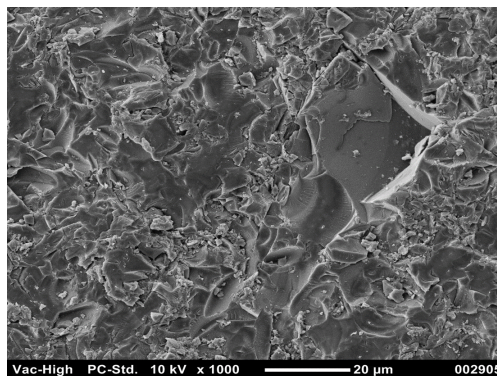
ガラス 80



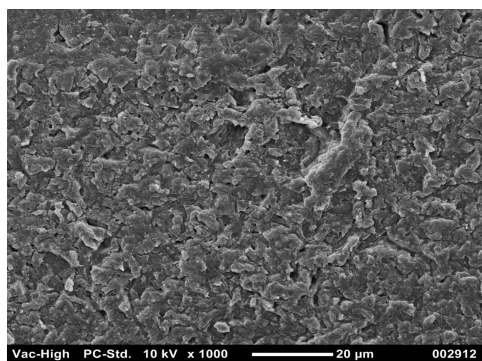
PET 500



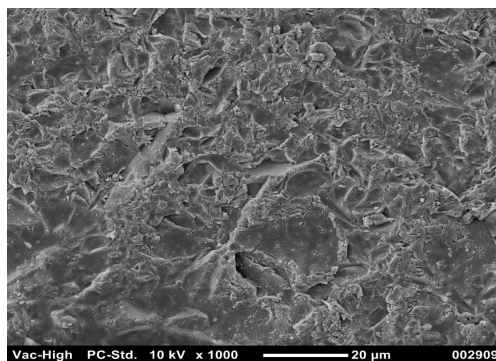
ガラス 500



PET 1000



ガラス 1000



考察

実験 1 の結果から、液体が固体表面を上昇する長さは、固体表面の粗さが粗いほど長くなると考えられる。また、上昇する速さについても、表面が粗いもののほどより速く上昇すると考えられる。

実験 2 で得られた画像から、表面が粗いもののほうが、深く、鋭い溝が多くみられることがわかる。この溝をインクが上昇したと考えられる。毛細管現象では、液体の上昇する長さは上昇する管の内径に反比例する。このことと照らし合わせて考えると、表面現象においても、毛細管現象と同じような現象が起きていると考えられる。

結論

- 上昇する長さは表面の粗さが関係している。
- 固体表面においても毛細管現象が起きていると考えられる。
- 固体による違いはみられない。

今後の課題

今回の実験では、実験の途中で固体表面のインクが乾燥してしまい、インクの上昇が止まってしまった。これによって、この実験で得られた数値が、上昇の限界であるのか、インクが乾燥したことによるものであるのかがはっきりとしない。今後は実験の途中でインクが乾燥しないような実験方法を考えていきたいと思う。また、今回の実験では室内にそのまま放置して実験を行ったため、温度や湿度が実験中に変化していた。より正確なデータを得るために湿度や温度を一定にして実験を行えるようにしたい。

星の瞬きの定量的観測

Quantitative Observation of Stars Twinkling

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

余世良 吉田拓暉

はじめに

本校卒業生の 2014 年度の研究”Quantification of Stars Twinkling”において、低い星ほど激しく瞬くが、その原因については不明であると結論付けられていた。私たちは身近な現象である瞬きが周囲の状況にどのように関係しているのかに興味を持ち、瞬きの激しさの再定義を行い、より定量的に現象を解析しようと試みた。

目的

先行研究にあった、星の高度と瞬きの激しさの関係性について確認をするとともに、データを定量的に取り扱って、高度以外の条件との相関を明らかにすること。

予備実験 観測機器に起因する誤差の測定

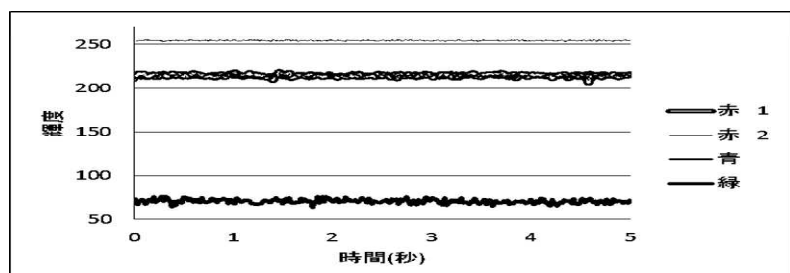
方法

- ① 暗室においてカメラ (Canon EOS kiss X5) を用いて、直流電源装置につないだ 3 つの単色 LED (赤, 青, 緑) のビデオ (1280×720 ピクセル, 60 枚/秒, 絞り値 5.0, ISO 感度 6400) を撮影した (赤については明るさを変えて 2 回)。なお、カメラの自動色調調整機能などはすべてオートを切り、以下すべての撮影について設定変更をしていない。
- ② 撮影したビデオのうち、無作為に抽出した 5 秒間を Quick Time Player でコマ送りにしつつ、画面上のカーソル先端の RGB 値 (赤, 緑, 青の各色を数値に変換したもの。各 255 を最大とする) を表示するフリーソフト「スポイト君」を使用し、RGB 値を記録した。
- ③ RGB 値を YUV 色空間の Y 値 (輝度, つまり観測点における光の量) に変換するための方程式

$$\text{輝度} = 0.299 \times \text{R 値} + 0.587 \times \text{G 値} + 0.114 \times \text{B 値}$$
 によって輝度を求めた。
- ④ 直流電源につないだ LED が発光段階で大きく揺らぐとは考えにくいとため、求めた輝度の平均値を真の値であると仮定し、データの標準偏差を誤差の大きさとして評価した。

結果

	平均輝度	標準偏差
赤 1	215	1.32
赤 2	254	0.444
青	214	1.65
緑	70.9	2.35



誤差は標準偏差にして 2 程度であった。また,輝度が著しく高く飽和点に近い場合は誤差が抑えられ,逆に輝度が低くなると誤差は大きくなると分かった。

考察

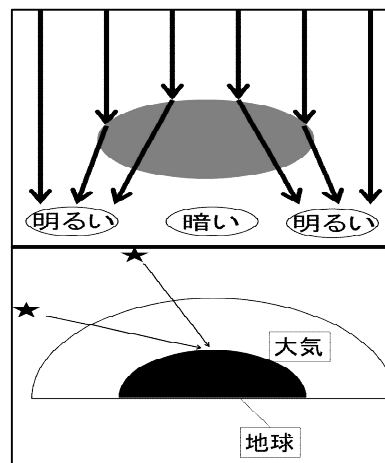
狭い暗室内で,入室から時間が経って空気の流れが落ち着いてから撮影を行ったため,誤差の原因は空気による擾乱ではないと考える。ゆえに,観測機器とこの撮影方法における不可避の誤差は 2 程度であり,瞬きによる輝度の変動がこれよりもはるかに大きければ誤差は無視できると考える。また,暗い対象ほど誤差は大きくなるため,より明るい星を観測することによって誤差を抑えることが可能であると考え。

観測 実際の星の観測

仮説

一般に星の瞬きは,風による密度の変化や水蒸気量の偏りなどによって屈折率が局所的に周囲と異なる部分に光線が進入することによって屈折され,観測地点によって光の量に差ができることに起因しているといわれている。特定の地点からの観測では光の量が多い領域,少ない領域が次々に変化するため,星の輝度が変化して見える。

したがって,高度が低く,光線が通過する大気層が厚い星の方が屈折される機会が多くなり,高度が高い星に比べてより激しく瞬くのではないかと考えた。



方法

- ① 予備実験と同様の道具,方法によって以下の日時,場所で星を撮影した。

2016 年 8 月 31 日 20:00~21:00 に 30 分おき 船橋高校屋上(140° 0' N, 35° 41' E)

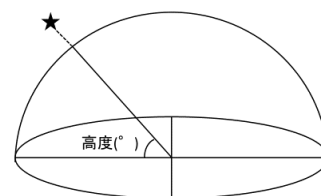
アルクトゥールス・アンタレス・アルタイル・ベガ・火星・土星

2016 年 12 月 11 日 19:00~翌 1:00 に 1 時間おき 路上(139° 58' N, 35° 43' E)

カペラ・リゲル・シリウス・金星

- ② 撮影したビデオから RGB 値を測り,実験と同様に輝度に変換した。
- ③ 得られたデータの平均を瞬きが一切ないときの星の見かけの明るさであると仮定し,標準偏差(データのばらつき)を計算することでそれを星の瞬きの激しさの指標とした。
- ④ データの標準偏差と,撮影時の星の高度,輝度,撮影時間との相関を見た。

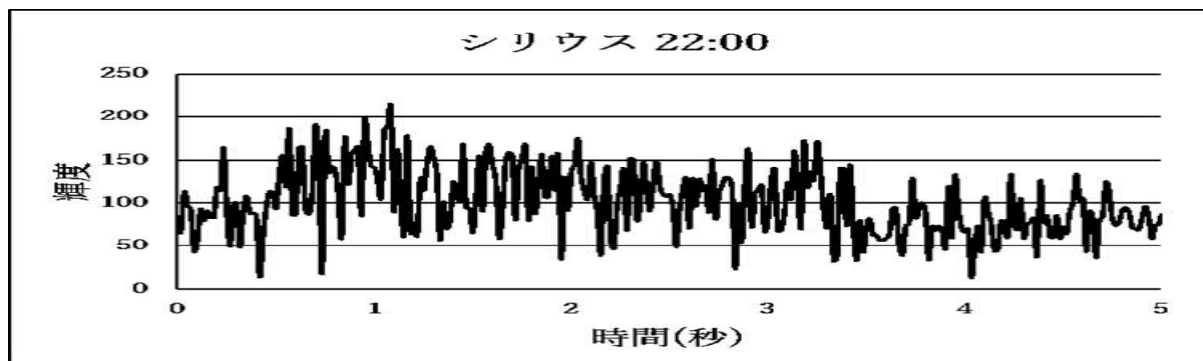
(高度についてはステラナビゲータ 9,輝度については観測に準拠)



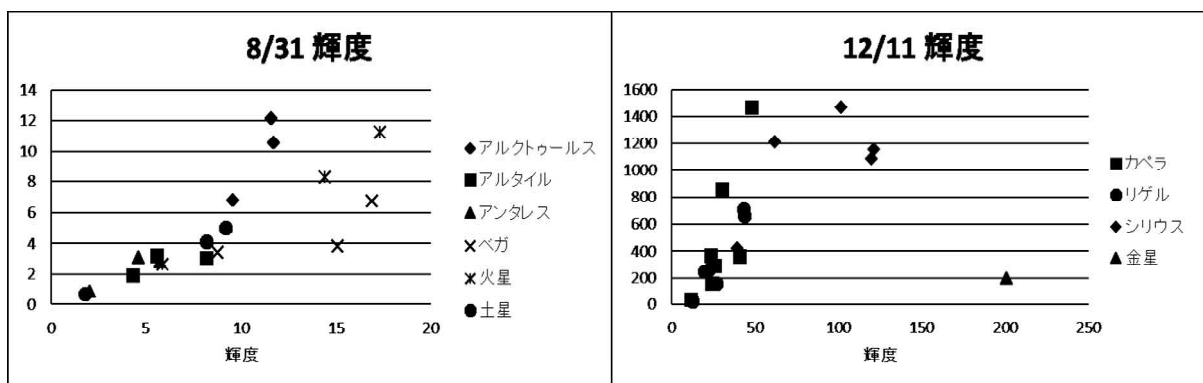
(ここで,星の瞬きの激しさを標準偏差によって評価することとしたのは,以下に示す観測結果からも分かるように輝度の変動が不規則であり,瞬きの回数の測定が難しい上,変化の大きさも考慮した指標が必要だったからである。)

結果

星の輝度の変動は下のグラフのようになった。代表例として代表例として 12/11 22:00 でのシリウスのデータを掲載する。

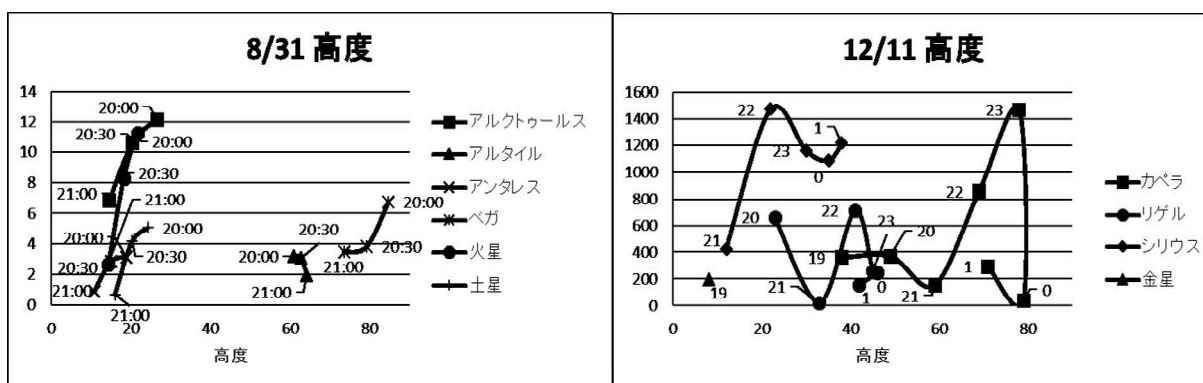


このようなデータ（計 38 個）についてそれぞれ標準偏差を計算し、日ごとに分けてグラフにしたものが下のものである。また、この 4 個のグラフの縦軸はどれも標準偏差で、数値が大きいほど瞬きが激しかったことを表している。



この2つのグラフは横軸に輝度(撮影における平均輝度)を取っている。

- ・ 8月31日に観測した星については輝度が低く、観測誤差と同程度の標準偏差になってしまっているデータがあり、この部分に関しては信頼できない。しかし、それらを除いて全体的に見れば、輝度と瞬きの激しさの間には正の相関があるといえる。
- ・ 12月11日のデータについても金星を除けば輝度と瞬きの激しさの間には正の相関が認められ、8月31日のデータと共通している。



※データラベルは撮影時刻を示す。

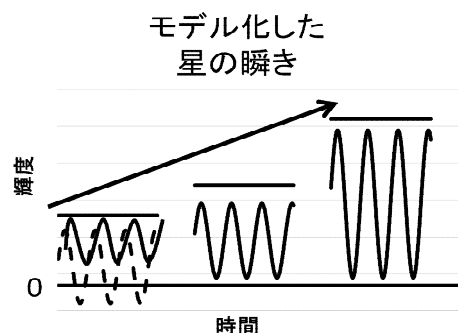
この2つのグラフは横軸に星の高度(上記定義参照,単位は度)を取っている。

- ・仮説に反して両日とも高度と瞬きの激しさの間には相関みられなかった。
- ・8月31日の観測データにおいては撮影を行うのが遅いほど瞬きが穏やかになる傾向があったが、12月11日のデータにはそのような傾向はみられず、撮影時刻と瞬きの激しさの関係は2日間に共通のものではなかった。しかし、同じ観測日の星については瞬きの激しさの変化は類似していた。

考察

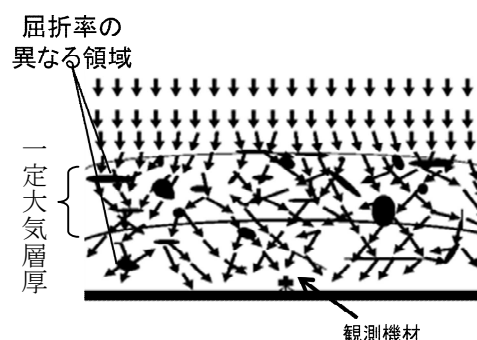
- ・撮影した2日について標準偏差の値が大きく異なっている原因については、夏よりも冬の方が大気中の水分量が少なく、空気が澄んでいるために星の輝度が12/11の観測の方が大きかったことに起因すると考える。

- ・輝度と瞬きの激しさの間の正の相関関係については、明るい星は輝度ゼロの下限から離れている分、幅広い値を取ることができ、激しく瞬くのではないかと考えられる。また、暗すぎて輝度がほとんどゼロの星に関しては右図のようにして瞬きが抑えられる傾向があるのではないかと考える。



- ・星の高度と瞬きの激しさの間には相関がみられなかったことから、瞬きの激しさと光線が通過する大気層の厚さの間にある関係は単純な比例関係ではないことが推測される。しかし、事実として宇宙空間において星を観測しても瞬かないことから、大気が瞬きの原因であることは間違いない。

以上のことから、星の瞬きの激しさはある一定大気層厚までは屈折により増え続けるが、それ以上になると屈折された光どうしが互いを補い合い、光線の方向の乱雑さが増えることはなくなるため、それ以上瞬きの激しさが増えることはなくなるのではないかと考える。つまり、一定大気層厚を通過するまでは瞬きの激しさは増え続けるが、それ以降は増えなくなるのではないかと考える。



- ・一般に惑星は地球との距離が近く、見かけの大きさが大きいため、その面内で曲げられた光どうしが打ち消しあって瞬かないとされている。にも関わらず今回の観測においては多少の瞬きが見られた。これは観測方法が点を測光するものだったためではないかと考える。

結論

標準偏差を用いて星の瞬きの激しさを定量的に評価することには成功したが、高度との間には想定していた相関は存在しなかった。一方で、星の輝度との間には正の相関があることが分かった。

今後の課題

測光を面測光にすることで肉眼の観測に近づけると共に、観測標高を高くすることで考察のモデルが正しいものかを検証する必要がある。

$(a+bi)^n$ の規則性

Regularity of the Expansion of $(a+bi)^n$

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
井上 竜徳 唐橋 幸佑

目的

複素数の n 乗についてド・モアブルの定理が知られているが、私たちは $(a+bi)^n$ を直接展開することによって現れる規則性を探ろうと試みた。

前提

ド・モアブルの定理

複素数平面上において

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos (n \theta) + i \sin (n \theta)$$

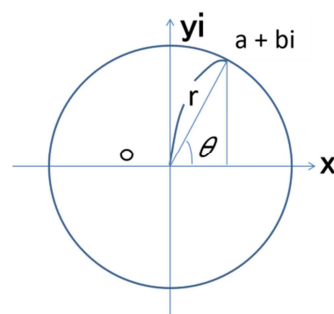
が成り立つ。

例) 図において、

$a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ が成り立つことから、

$$a + bi = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore (a + bi)^n = r^n \{ \cos(n \theta) + i \sin(n \theta) \}$$



考察

n を固定して a , b をそれぞれ変化させたときの規則性を考える。

(i) $n = 2$ のとき、

$(a + bi)^2$ の結果

bi) ² の結果		a				
n = 2		1	2	3	4	5
b	1	2i	3+4i	8+6i	15+8i	24+10i
	2	-3+4i	8i	5+12i	12+16i	21+20i
	3	-8+6i	-5+12i	18i	7+24i	16+30i
	4	-15+8i	-12+16i	-7+24i	32i	9+40i
	5	-24+10i	-21+20i	-16+30i	-9+40i	50i

a が 1 増加するにつれて実部が $2a + 1$ ずつ増加し、虚部が $2b$ ずつ増加する…①

b が 1 増加するにつれて実部が $2b + 1$ ずつ減少し、虚部が $2a$ ずつ増加する…②

① 例 : $b = 1$ と固定した場合、以下ようになる。

a を 1 から変化させると、 実部

虚部

$$\begin{array}{lcl} a = 1 \Rightarrow 0 & & 2i \\ a = 2 \Rightarrow 3 & \left. \begin{array}{l} (+ 2 \times 1 + 1) \\ (+ 2 \times 2 + 1) \end{array} \right\} & \left. \begin{array}{l} 4i \\ 6i \end{array} \right\} \begin{array}{l} (+ 2 \times 1) i \\ (+ 2 \times 2) i \end{array} \\ a = 3 \Rightarrow 8 & & \end{array}$$

となる。

②もこれと同様のことが起こる。

*ただし、②の場合、虚数単位 i を 2 乗するため $(2b + 1)$ の係数は (-1) となる。

これは、

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$\{ (a + 1) + bi \}^2 = (a^2 - b^2 + 2a + 1) + (2ab + 2b)i$$

$$\{ a + (b + 1)i \}^2 = (a^2 - b^2 - 2b - 1) + (2ab + 2a)i$$

となることからわかる。

前ページの表の

- ・ a 列目の複素数を $(a + b_1 i)^2, (a + b_2 i)^2, \dots$
- ・ b 行目の複素数を $(a_1 + bi)^2, (a_2 + bi)^2, \dots$

と表すと、 $\{a_m + bi\}^2$ と $\{a + b_m i\}^2$ の実部の一般項が 2 次の関数であることから第 1 階差数列が等差数列になる。それに対し、虚部の一般項が 1 次の関数であることから等差数列になる。…③

③ 例 1 :

$\{a_m + bi\}^2$ のとき、 $b = 1$ と固定した場合

実部 :

0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, ...
 \
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...

第 1 階差数列をとると、公差が 2 の等差数列になる。

虚部 :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...

公差が 2 の等差数列である。

例 2 :

$\{a + b_m i\}^2$ のとき、 $a = 1$ と固定した場合

実部 :

0, -3, -8, -15, -24, -35, -48, -63, -80, -99, ...
 \
-3, -5, -7, -9, -11, -13, -15, -17, -19, ...

第 1 階差数列をとると、公差が-2 の等差数列になる。

虚部 :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...

公差が 2 の等差数列である。

$\{a_m + bi\}^2$ と $\{a + b_m i\}^2$ を複素平面上に表したとき、原点からの距離を数列として表すと、第 1 階差数列は公差が 2 の等差数列になる。…④

④ 例 :

$\{a_m + bi\}^2$ のとき、 $b = 1$ とした場合、距離は $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ より

2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...
 \
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

第 1 階差数列をとると、公差が 2 の等差数列になる。

※ここで、登場した公差は $2 = 2! = n!$ と表すことができる。

(ii) $n = 3$ のとき、

$(a + bi)^3$ の結果

bi) ³ の結果		a				
n = 3		1	2	3	4	5
b	1	-2+2i	2+11i	18+26i	52+47i	110+74i
	2	-11-2i	-16+16i	-9+46i	16+88i	65+142i
	3	-26-18i	-46+9i	-54+54i	-44+117i	-10+198i
	4	-47-52i	-88-16i	-117+44i	-128+128i	-115+236i
	5	-74-110i	-142-65i	-198+10i	-236+115i	-250+250i

a が 1 増加するにつれて実部が $3a^2 + 3a + 1 - 3b^2$ ずつ増加し、

虚部が $6ab + 3b$ ずつ増加する…①

b が 1 増加するにつれて実部が $6ab + 3a$ ずつ減少し、

虚部が $3b^2 + 3b + 1 - 3a^2$ ずつ減少する…②

① 例 : $b = 1$ と固定した場合、以下のようになる。

a を 1 から変化させると、

$$\begin{array}{lcl}
 a = 1 \Rightarrow & \text{実部} & \\
 a = 2 \Rightarrow & -2 & \\
 a = 3 \Rightarrow & 18 &
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 (+ (3 \times \boxed{2})^2 + 3 \times \boxed{2} + 1 - (3 \times \boxed{1})^2) \\
 (+ (3 \times \boxed{1})^2 + 3 \times \boxed{1} + 1 - (3 \times \boxed{1})^2)
 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{虚部} & \\
 & 2i & \\
 & 11i & \\
 & 26i &
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 (+ 6 \times \boxed{1} \times \boxed{1} + 3 \times \boxed{1})i \\
 (+ 6 \times \boxed{2} \times \boxed{1} + 3 \times \boxed{1})i
 \end{array} \right\} \text{ となる。}$$

② は実部、虚部でこれと逆のことが起こる。

*ただし、② の場合、虚数単位 i を 2 乗するため $(6ab + 3a)$ と $(3b^2 + 3b + 1 - 3a^2)$ の係数は (-1) となる ($i^3 = i^2 * i = (-1) * i$ より)。

これは、

$$\begin{aligned}
 (a + bi)^3 &= \{a^3 - 3ab^2\} + \{3a^2b - b^3\}i \\
 \{(a + 1) + bi\}^3 &= \{a^3 - 3ab^2 + 3a^2 + 3a + 1 - 3b^2\} + \{3a^2b - b^3 + 6ab + 3b\}i \\
 \{a + (b + 1)i\}^3 &= \{a^3 - 3ab^2 - 6ab - 3a\} + \{3a^2b - b^3 - 3b^2 - 3b - 1 + 3a^2\}i
 \end{aligned}$$

なることからわかる。

前ページと同様に $(a_n + bi)^3$, $(a + b_n i)^3$ を定めると、 $\{a_n + bi\}^3$ の実部の一般項が 3 次の関数であることから、第 2 階差数列が等差数列になる。それに対し、虚部の一般項が 2 次の関数であることから、第 1 階差数列が等差数列になる。

また、 $\{a + b_n i\}^3$ の実部の一般項が 2 次の関数であるということから、第 1 階差数列が等差数列になる。それに対し、虚部の一般項が 3 次の関数であることから、第 2 階差数列が等差数列になる。…③

③ 例 1 :

$\{a_n + bi\}^2$ のとき、 $b = 1$ と固定した場合

実部 :

$$\begin{array}{cccccccc}
 -2, & 2, & 18, & 52, & 110, & 198, & 322, & 490, \dots \\
 \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow & & & & & & & \\
 4, & 16, & 34, & 58, & 88, & 124, & 168, \dots & \text{(第 1 階差数列)} \\
 \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow & & & & & & & \\
 12, & 18, & 24, & 30, & 36, & 42, \dots & \text{(第 2 階差数列)}
 \end{array}$$

第 2 階差数列をとると、公差が 6 の等差数列になる。

虚部：

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2, & 11, & 26, & 47, & 74, & 107, & 146, & 191, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 9, & 15, & 21, & 27, & 33, & 39, & 45, & \cdots \end{array} \quad (\text{第 1 階差数列})$$

第 1 階差数列をとると、公差が 6 の等差数列になる。

例 2：

$\{ a + b_{\text{m}}i \}^2$ のとき、 $a = 1$ と固定した場合

実部：

$$\begin{array}{cccccccccccc} -2, & -11, & -26, & -47, & -74, & -107, & -146, & -191, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ -9, & -15, & -21, & -27, & -33, & -39, & -45, & \cdots \end{array} \quad (\text{第 1 階差数列})$$

第 1 階差数列をとると、公差が -6 の等差数列になる。

虚部：

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2, & -2, & -18, & -52, & -110, & -198, & -270, & -426, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ -4, & -16, & -34, & -58, & -88, & -114, & -156, & \cdots & (\text{第 1 階差数列}) \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ -12, & -18, & -24, & -30, & -36, & -42, & \cdots & (\text{第 2 階差数列}) \end{array}$$

第 2 階差数列をとると、公差が -6 の等差数列になる。

上と同様にして複素数の原点からの距離をとって数列に表すと、第 2 階差数列の階差は 6 に近似する。…④^ˆ

④^ˆ 例：

$\{ a_{\text{m}} + bi \}^2$ のとき、 $b = 1$ と固定した場合

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2\sqrt{2}, & 5\sqrt{5}, & 10\sqrt{10}, & 17\sqrt{17}, & 26\sqrt{26}, & 37\sqrt{37}, & 1250\sqrt{2}, & \cdots \\ \text{これを小数に直すと、} \\ 2.828, & 11.180, & 31.622, & 70.093, & 132.575, & 225.062, & 353.553, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 8.352, & 20.442, & 38.470, & 62.482, & 92.488, & 128.491, & \cdots & (\text{第 1 階差数列}) \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 12.090, & 18.028, & 24.012, & 30.006, & 36.003, & \cdots & (\text{第 2 階差数列}) \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 5.938, & 5.984, & 5.994, & 5.997, & \cdots & (\text{階差}) \\ \text{⌋} & \text{⌋} & \text{⌋} & \text{⌋} & & \\ 6 & 6 & 6 & 6 & & \end{array}$$

階差を 2 回とると、できた数列の階差が 6 に近似する。

※ここで、登場した階差は $6 = 3! = n!$ と表すことができる。

※④^ˆ で求めた第 2 階差数列の階差は、項数が大きくなればなるほど、6 に近づく。

結果

1) n を固定し、 a を変化させた場合の解の変化量は複素数 $(a + bi)^n$ を二項展開したときの a 、 b の次数で決まり、解の**実部**を数列で表すと、第 $((a \text{ の最高次数}) - 1)$ 階差数列が公差 $\pm(n!)$ の等差数列となる ($\Rightarrow$ 証明. 末尾付録)。 b を変化させたときの場合と符合は 3) を用いて判定する。

2) n を固定し、 a を変化させた場合の解の変化量は複素数 $(a + bi)^n$ を二項展開したときの a 、 b の次数で決まり、解の**虚部**を数列で表すと、第 $((a \text{ の最高次数}) - 2)$ 階差数列が公差 $\pm(n! \cdot b)$ の等差数列となる ($\Rightarrow$ 証明. 末尾付録)。 b を変化させたときの場合と符合は 3) を用いて判定する。

3) 上記の表での $a = b$ を挟んだ 2 数を考えるとき、 n を $4k, 4k + 1, 4k + 2, 4k + 3 (k \in \mathbb{N})$ の 4 つに分け、 $(a + bi)^n = (c_1 + d_1 i)$ 、 $(b + ai)^n = (c_2 + d_2 i)$ とすると、

(i) $n = 4k$ のとき、

$$c_1 = c_2, d_1 = -d_2$$

(ii) $n = 4k + 1$ のとき、

$$c_1 = d_2, d_1 = c_2$$

(iii) $n = 4k + 2$ のとき、

$$c_1 = -c_2, d_1 = d_2$$

(iv) $n = 4k + 3$ のとき、

$$c_1 = -d_2, d_1 = -c_2$$

4) n を固定し、 a 、 b を変化させた場合の解の原点からの距離を数列で表すと、第 $(n-1)$ 階差数列は公差 $(n!)$ の等差数列になる (n が偶数の場合のみ)。 n が奇数の場合は、等差数列にはならないが、第 $(n-1)$ 階差数列の項差が $(n!)$ に近似する。

結論

$(a + bi)^n$ を直接展開することによって規則性を見出すことができた。加えて、1) より元の数列の各項の係数で階差数列の公差を表すと、 $(n!) = \sum_{k=1, n} \{ {}_n C_k \cdot k^n \cdot (-1)^{n+k} \}$ と導ける。

参考文献

www.geisya.or.jp

ja.wikipedia.org

多元連立 1 次方程式の解法マクロの使い方

(千葉工業大学 工学部 藤井研究室)

付録 証明

1)の証明： $(a+bi)^n$ において a の最高次数は n なので、 $(a+bi)^n$ の a を変化させたときに実部を $(n-1)$ 回階差をとる。このとき、公差が $(n!)$ の等差数列になることを証明する。

数列 $\{a_m\}$ を $a_m = \text{Re}\{(a+m)+bi\}^n$ とおくと、

$$a_m = \sum_{k=0, [n/2]} \{ {}_nC_{2k} * (a+m)^{n-2k} * (bi)^{2k} \} \quad \text{と表せる。}$$

$a + m = x$ と置くと、

$$a_m = x^n - {}_nC_2 * x^{n-2} * b^2 + {}_nC_4 * x^{n-4} * b^4 - \cdots \pm {}_nC_{2[n/2]} * x^{2[n/2]} * b^{2[n/2]} \quad \text{と表せる。}$$

ここで、 $a'_m = a_{m+1} - a_m$ と置く(操作1とする)と、

$$a'_m = \{ (x+1)^n - {}_nC_2 * (x+1)^{n-2} * b^2 + {}_nC_4 * (x+1)^{n-4} * b^4 - \cdots \pm {}_nC_{2[n/2]} * (x+1)^{2[n/2]} * b^{2[n/2]} \} \\ - \{ x^n - {}_nC_2 * x^{n-2} * b^2 + {}_nC_4 * x^{n-4} * b^4 - \cdots \pm {}_nC_{2[n/2]} * x^{2[n/2]} * b^{2[n/2]} \}$$

このとき、 a_{m+1} と a_m の初項にのみ注目すると、

$$(x+1)^n - x^n = \sum_{k=0, n} ({}_nC_k * x^k) - x^n = \sum_{k=0, n-1} ({}_nC_k * x^k) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形でき、次数が一つ下がっていることがわかる。

これを a_{m+1} と a_m の他の項にも行くと、同じ次数の $x+1$ と x の係数は等しいので、 $x+1$ と x の指数が0となったときに、末尾の項から打ち消しあう。

このとき、操作1を n 回行うので、 $(x+1)^n$ と x^n の階差数列のみを議論する。

数列 $\{d_m\}$ を $d_m = x^n$ とおく。

ここで、 $\{d_m\}$ で操作1を行うと、 $\textcircled{1}$ より

$$d'_m = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0, n-1} ({}_nC_k * x^k)$$

次に、 $\{d'_m\}$ で操作1を行うと、

$$d''_m = \sum_{k=0, n-1} \{ {}_nC_k * (x+1)^k \} - \sum_{k=0, n-1} ({}_nC_k * x^k)$$

$k=0$ の時は、 ${}_nC_k - {}_nC_k = 0$ より、

$$d''_m = \sum_{k=1, n-1} \{ {}_nC_k * (x+1)^k \} - \sum_{k=1, n-1} ({}_nC_k * x^k) = \sum_{k=1, n-1} [{}_nC_k * \{ (x+1)^k - x^k \}]$$

$\textcircled{1}$ より、

$$d''_m = \sum_{k=1, n-1} \{ {}_nC_k * \sum_{p=0, k-1} ({}_nC_p * x^p) \}$$

これより、操作1を1度行くと、末端にある x の累乗が d'_m になり、それぞれの Σ の初項が打ち消されることがわかる。

d_m の状態から操作1を n 回行うと

$$d_m^{(n)} = \sum_{k=n-1, n-1} ({}_nC_k * \sum_{p=n-2, k-1} ({}_nC_p * \sum_{q=n-3, p-1} ({}_nC_q * \cdots * \sum_{z=n-n, y-1} ({}_nC_z * x^z)))) \\ = \sum_{k=n-1, n-1} ({}_nC_k * \sum_{p=n-2, n-2} ({}_{n-1}C_p * \sum_{q=n-3, n-3} ({}_{n-2}C_q * \cdots * \sum_{z=n-n, n-n} ({}_{n-n+1}C_z * x^z))))$$

となり、

$$d_m^{(n)} = {}_nC_{n-1} * {}_{n-1}C_{n-2} * {}_{n-2}C_{n-3} * \cdots * {}_2C_1 * {}_1C_0 = n!$$

最後に、 $d_m^{(n)} = d_{m+1}^{(n-1)} - d_m^{(n-1)}$ となる $\{d_m^{(n-1)}\}$ は $\{a_m\}$ の第 $(n-1)$ 階差数列である。

よって、 $\{a_m\}$ の第 $(n-1)$ 階差数列は公差 $(n!)$ の等差数列になる。

2)の証明： $(a+bi)^n$ の b を変化させたときに実部を $(n-2)$ 回階差をとると、公差が $(n!*b)$ の等差数列になることを証明する。

1)の証明と同様にして、数列 $\{a_m\}$ を $a_m = \text{Im}\{(a+m)+bi\}^n$ とおくと、

$$a_m = \sum_{k=0, [(n-1)/2]} \{ {}_nC_{2k+1} * (a+m)^{n-2k-1} * (bi)^{2k+1} \} \quad \text{と表せる。}$$

$a + M = X$ と置くと、

a_m も初項が $n * X^{n-1} * b$ となるため、実数の時と同様にして、

$$d_m^{(n-1)} =$$

$$n \sum_{k=n-2, n-2} ({}_{n-1}C_k * \sum_{p=n-3, n-3} ({}_{n-2}C_p * \sum_{q=n-4, n-4} ({}_{n-3}C_q * \cdots * \sum_{z=n-n+1, n-n+1} ({}_{n-n+2}C_z * X^z)))) \\ = n * {}_{n-1}C_{n-2} * {}_{n-2}C_{n-3} * \cdots * {}_2C_1 * b = n! * b$$

最後に、 $d_m^{(n)} = d_{m+1}^{(n-1)} - d_m^{(n-1)}$ となる $\{d_m^{(n-1)}\}$ は $\{a_m\}$ の第 $(n-2)$ 階差数列である。

よって、 $\{a_m\}$ の第 $(n-2)$ 階差数列は公差 $(n!*b)$ の等差数列になる。

指折り掛け算の拡張

Extension of multiplication by bending fingers

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

齋藤 諒明

目的

計算できる数が限られてしまっている指折り掛け算を拡張し、暗算ではすぐに答えが出せないような掛け算でも指で行うことにより計算を簡略化し、正確な答えを出す。

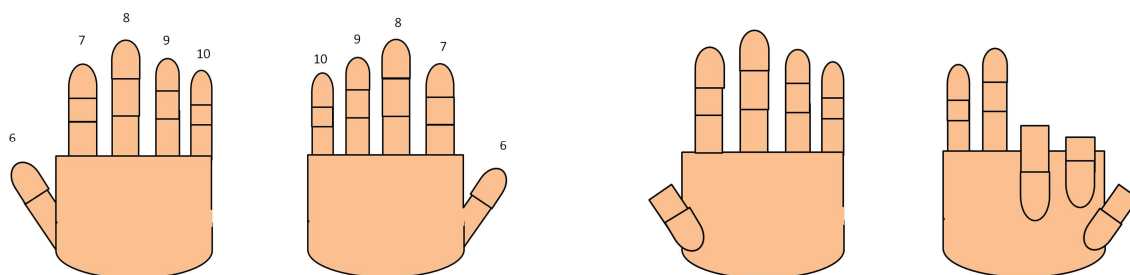
指折り掛け算とは

- ・左右の指 10 本を使用して行う掛け算。
- ・1～5 の段までの掛け算を教わった欧米諸国の子供たちの間でより大きな数の掛け算をするために広まっていった（よって 1～5 の掛け算はできることを前提とする）
- ・一般に知られている方法は 6～10、11～15 の 2 種類の範囲での指の折り方があり、指折り掛け算を行うには計算できる数がどちらかの範囲に含まれていなければならない

〈基本的な方法 I（6～10 のとき）〉

- ① 両手に親指から 6, 7, 8, 9, 10 と数字を割り当てていく
- ② 計算する 2 数と 2 数より小さい数に対応する指を折る
- ③ 折った指の本数を足し、さらに 10 を掛ける
- ④ 折っていない指の本数を掛ける
- ⑤ ③と④を足す

（例） $6 \times 8 = 48$ を指で行う場合



- ② 左手の親指の 1 本、右手の親指から中指の 3 本を折る
- ③ 左手の折っている 1 本と左手の折っている 3 本を足し 10 を掛ける $\Rightarrow (1 + 3) \times 10 = 40$
- ④ 左手の折っていない 4 本と右手の折っていない 2 本を掛ける $\Rightarrow 4 \times 2 = 8$
- ⑤ ③と④を足す $\Rightarrow 40 + 8 = 48$

（解説）

計算する 2 数を a 、 b とする

折った指はそれぞれ $a - 5$ 、 $b - 5$ とあらわせる

また、折っていない指はそれぞれ $10 - a$ 、 $10 - b$ とあらわせる

③の操作は $\{(a - 5) + (b - 5)\} \times 10$

④の操作は $(10 - a)(10 - b)$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{3}+\textcircled{4} \text{ より} \quad \{(a-5)+(b-5)\} \times 10+(10-a)(10-b) \cdots * \\
& \quad = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab \\
& \quad = ab + 10a - 10a + 10b - 10b + 100 - 100 \\
& \quad = ab
\end{aligned}$$

したがって**基本的な方法Ⅰ**では $\{(a-5)+(b-5)\} \times 10+(10-a)(10-b)$ の計算を指で行い積を求めていることになる

〈基本的な方法Ⅱ（11～15 のとき）〉

① 両手に親指から 11, 12, 13, 14, 15 と数字を割り当てていく

Ⅰの操作を

③折った指の本数を足し 10 を加えたのち、10 を掛ける

④折った指の本数を掛ける という操作に変える

(例)

$13 \times 13 = 169$ を行う場合

② 左手の親指から中指の 3 本と右手の親指から中指の 3 本を折る

③ 左手の折っている 3 本と右手の折っている 3 本を足し 10 を加えたものに 10 を掛ける

$$\Rightarrow (3 + 3 + 10) \times 10 = 160$$

④ 折った指の本数を掛ける $\Rightarrow 3 \times 3 = 9$

⑤ ③と④を足す $\Rightarrow 160 + 9 = 169$

(解説)

計算する2数をa、bとする

折った指はそれぞれ $a-10, b-10$ とあらわせる

③の操作は $\{(a-10)+(b-10)+10\} \times 10$

④の操作は $(a-10)(b-10)$

$$\begin{aligned}
\textcircled{3}+\textcircled{4} \text{ は} \quad & \{(a-10)+(b-10)+10\} \times 10+(a-10)(b-10) \\
& = 10a + 10b - 100 + ab - 10a - 10b + 100 \\
& = ab + 10a - 10a + 10b - 10b + 100 - 100 \\
& = ab
\end{aligned}$$

したがって**基本的な方法Ⅱ**では $\{(a-10)+(b-10)+10\} \times 10+(a-10)(b-10)$ の計算を指で行い積を求めていることになる

考察 1（下一桁が 6～0 のとき）

16～20の範囲について考える。

求める 2 数をa、bとすると折った指の数は $-15, b-15$ あらわせ、

折っていない指の数は $20-a, 20-b$ とあらわせる。

これを**基本的な方法Ⅰ**にあてはめると

$$\begin{aligned}
& \{(a-15)+(b-15)\} \times 10+(20-a)(20-b) \\
& = 10a + 10b - 300 + 400 - 20a - 20b + ab \\
& = ab - 10a - 10b + 100 \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$-10a - 10b + 100$ が余分なのでこれを指の操作で消すことを考える。

$$-10a - 10b + 100 = -10(a + b - 10) = -10\{(a - 15) + (b - 15) + 20\}$$

これを①から引くと計算ができるはずである。

$$\begin{aligned} & \{(a - 15) + (b - 15)\} \times 10 + (20 - a)(20 - b) + 10(a - 15) + (b - 15) + 20\} \\ & = \{2(a - 15) + 2(b - 15) + 20\} \times 10 + (20 - a)(20 - b) \end{aligned}$$

よって 16～20 のとき、この式に対応する指の動かし方をすればいいので

I の③を「折った指の本数を足し 2 をかけ 20 を加え、さらに 10 を掛ける」という操作にかえることによって計算が行えるはずである。

同様に 26～30、36～40、46～50…と範囲を変えていくとき

$\{\square(a - \Delta) + \square(b - \Delta) + \circ\} \times 10 + (\bullet - a)(\bullet - b)$ の形で表すことができた。

範囲	$\square$	Δ	$\circ$	$\bullet$
6～10	1	5	0	10
16～20	2	15	20	20
26～30	3	25	60	30
36～40	4	35	120	40
46～50	5	45	200	50
10n-4～10n	n	10n-5	10n(n-1)	10n

$$\{n(a - 10n + 5) + n(b - 10n + 5) + 10n(n - 1)\} \times 10 + (10n - a)(10n - b)$$

という計算を指で行えばよい。a-10n+5、b-10n+5 は折った指の数を、10n-a、10n-b は折っていない指の本数を表しているから、**基本的な方法 I** の③を「折った指の本数を足し n をかけ 10n(n-1) を加え、さらに 10 を掛ける」という操作にかえることによって計算ができるはずである。

考察 2（下一桁が 1～5 のとき）

考察 1 と同様の手順で 21～25 について**基本的な方法 II** にあてはめていくと、
-10a-10b+100 が余りとして出てくる。

$$-10a - 10b + 100 = -10(a + b - 10) = -10\{(a - 20) + (b - 20) + 30\}$$

$$\begin{aligned} & \text{と変形できるので } \{(a - 20) + (b - 20) + 10\} \times 10 + (a - 20)(b - 20) \\ & + 10\{(a - 20) + (b - 20) + 30\} \end{aligned}$$

$$= \{(a - 20) + (b - 20) + 20\} \times 20 + (a - 20)(b - 20) \cdots \cdots *$$

よって 21～25 のとき*の操作を指で行えば計算ができるはずである。

このような方法で範囲を変えていき、 $\{(a - \square) + (b - \square) + \square\} \times \square + (a - \square)(b - \square)$ とすると下の表のような規則性が見られた。

範囲	$\square$	範囲	$\square$
11～15	10	41～45	40
21～25	20	51～55	50
31～35	30	10n+1～10n+5	10n

したがって 10n+1～10n+5 の範囲の 2 数の計算では*は次のようにあらわせる。

$$\{(a - 10n) + (b - 10n) + 10n\} \times 10n + (a - 10n)(b - 10n)$$

a-10n、b-10n は折った指を表しているの、**基本的な方法 II** の③を「折った指の本数を足し 10n を

加えたのち、 $10n$ を掛ける」という操作に変えることによって計算ができるはずである。

考察 3

考察 1 と 2 の二つの計算方法が生まれてしまったので、これを一つにまとめることを考える。

計算する範囲を $5m-4$ から $5m(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$ とし、 c と d の積を求めるとき

折った指の数は $c-5m+5$ 、 $d-5m+5$ 折っていない指の数は $5m-c$ 、 $5m-d$ とあらわせる。これを基本的な方法 I にあてはめると

$$\begin{aligned} & \{(c-5m+5) + (d-5m+5)\} \times 10 + (5m-c)(5m-d) \\ &= 10c + 10d - 100m + 100 + 25m^2 - 5cm - 5dm + cd \\ &= cd + 25m^2 - 5cm - 5dm - 100m + 10c + 10d + 100 \\ &= cd + 5(5m^2 - cm - dm - 20m + 2c + 2d + 20) \\ &= cd + 5(m-2)(5m-c-d-10) \\ &= cd - (5m-10)(c+d-5m+10) \\ &= cd - (5m-10)\{(c-5m+5) + (d-5m+5) + 5m\} \end{aligned}$$

このことから $5m-4$ から $5m(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$ の範囲での 2 数の積は次のように求められることがわかる。

$$\{(c-5m+5) + (d-5m+5)\} \times 10 + (5m-c)(5m-d) + (5m-10)\{(c-5m+5) + (d-5m+5) + 5m\}$$

$\alpha = c-5m+5, \beta = d-5m+5$ とおくと

$$(\alpha + \beta) \times 10 + (5 - \alpha)(5 - \beta) + (5m - 10)(\alpha + \beta + 5m)$$

ここでの α, β は折った数を、 $5-\alpha, 5-\beta$ は折っていない数を表しているので、 $(\alpha + \beta) \times 10 + (5 - \alpha)(5 - \beta)$ は基本的な方法 I の * そのものである。

したがって、 $5m-4$ から $5m(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$ の範囲での 2 数の積は

$$\begin{aligned} & (\text{折った指の和}) \times 10 + (\text{折っていない指の積}) \\ & + \{ (\text{範囲の最大}) - 10 \} \{ (\text{折った指の和}) + (\text{範囲の最大}) \} \end{aligned}$$

結論と今後の展望

はじめの範囲は $6 \sim 10$ 、 $11 \sim 15$ というものだったが $10n-4 \sim 10n$ 、 $10n+1 \sim 10n+5$ という範囲を経て、最終的には $5m-4 \sim 5m$ にまで拡張できた。

しかし、計算する数同士が大きくなっていくごとに暗算で行う部分の計算も複雑になっていくのでその場合の式も新たに考える必要がある。

ハノイの塔の柱を x 本にして最小手順を求める

Minimum Number of Moves Required to Solve the “Tower of Hanoi” with x Rods

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

坂口 慶多

はじめに

通常ハノイの塔は柱が 3 本で、 n 枚の円盤を移動する最小手順の数を表す式は $2^n - 1$ だと分かっている。しかし、柱が 4 本のときの最小手順の数を表す式は、コンピューターで調べた結果をもとにしたものならばネットに出ているが、規則性を論理的に導いたものは出ていない。そこで、一般に柱を x 本、円盤を n 枚としたときの最小手順の数の規則性を解明し、最小手順の数を表す式を求めることを目指した。

ハノイの塔のルール

- ・ 1 回の手順で 1 枚の円盤を移動させる。
- ・ 円盤の上にはそれよりも大きい円盤を置くことはできない。
- ・ 円盤を柱以外の場所に置いてはいけない。

目的

- ① まずは、 $x = 4$ とした場合について考察する。
- ② ① の考察から柱が 4 本のときの最小手順の数を表す式を求める。
- ③ $x \geq 5$ の場合にも応用し、柱を x 本、円盤を n 枚としたときの最小手順の数を表す式を求める。

定理

柱を 3 本、円盤を n 枚としたときの最小手順の数を $III_n (= 2^n - 1)$ 、柱を 4 本にしたときの最小手順の数を IV_n のようにローマ数字を用いて表すと柱が 4 本のときの最小手順の数に関して次が成り立つ。

- ・ $n = 1 \sim 3$ では最小手順の数は 2^1 ずつ増える。
- ・ $n = 3 \sim 6$ では最小手順の数は 2^2 ずつ増える。
- ・ $n = 6 \sim 10$ では最小手順の数は 2^3 ずつ増える。
- ・ $\vdots$

- ・ $IV_3 = 2IV_1 + III_2$
- ・ $IV_6 = 2IV_3 + III_3$
- ・ $IV_{10} = 2IV_6 + III_4$
- ・ $\vdots$

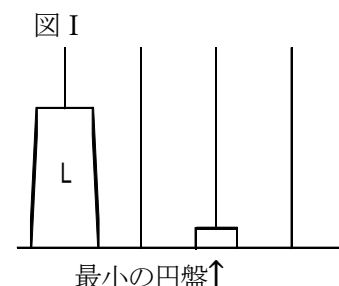
以下、このことの証明

考察

1. $x = 4$ における分割による最小手順化

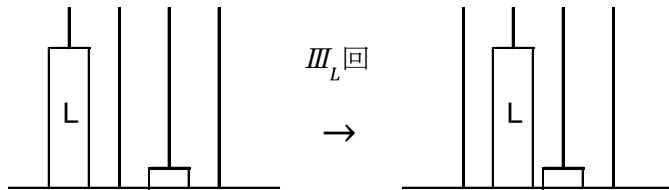
図 I のように最小の円盤を他の柱へ動かし、残りの円盤を L 枚とする。

このときに、 L 枚の円盤全てを他の柱に動かす方法を考えて、以下のように、 L 枚を 2 つに分割する方法としない方法がある。



※3 つ以上に分割する場合は、先に上から 2 つの塊を動かし、その際に 3 つ目以降の塊は無視することができるので、上から 2 つの塊の合計枚数を L 枚と置き換えることができる。
 そのため、ここでは 2 つに分割する場合のみを考える。

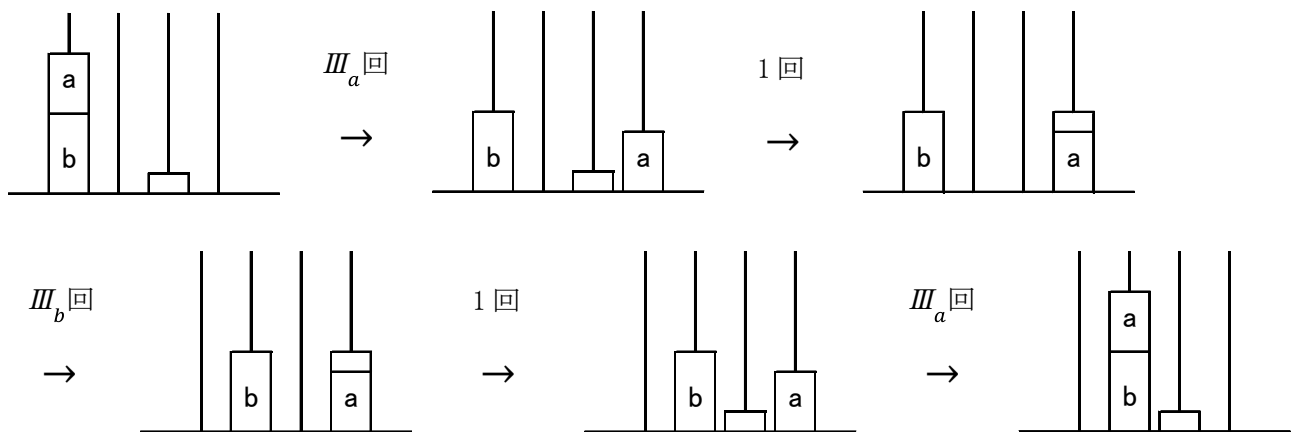
(i) L を分割しない場合



最小の円盤の上には何も置くことはできないので、1, 2, 4 本目の柱で、 $x = 3$ のときと同じように L 枚を動かす。

この場合の手順数は III_L 回。

(ii) L を 2 つに分割する場合 ※分割してできた 2 つの塊を仮に a 枚と b 枚とする。



$x = 3$ のときと同じように a 枚と b 枚を動かす。

この場合の手順数は、 $2III_a + III_b + 2 = III_{a+1} + III_b + 1$ 回。

また、 $III_{a+1} + III_b + 1 = 2^{a+1} + 2^b - 1$ より、 $2^{a+1} + 2^b$ の最小値を考えると、 $a + b + 1$ の値は一定なので、相加平均と相乗平均の不等式より、

$$2^{a+1} + 2^b \geq 2\sqrt{2^{a+1} \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b+1}} = 2\sqrt{2^{L+1}}$$

よって、等号成立は $a + 1 = b$ のときなので、 **$a + 1$ と b をできるだけ近い値にすると手順数が最小となる。**

ここで、 III_L と $III_{a+1} + III_b + 1$ を比較すると、

表 I より、 $L = 3$ のとき、 $III_L = III_{a+1} + III_b + 1$

$L \geq 4$ のとき、 $III_L > III_{a+1} + III_b + 1$

よって、 $L = 3$ のときは分割しても手順数が変わらず、

$L \geq 4$ のときは分割する方が最小手順をとる。

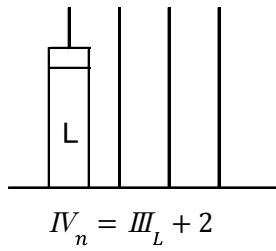
表 I

L	III_L	$III_{a+1} + III_{b+1}$
2	3	5
3	7	7
4	15	11
5	31	15
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2. IV_n の求め方

以下のように分割してできた塊の数によって場合分けして考える。

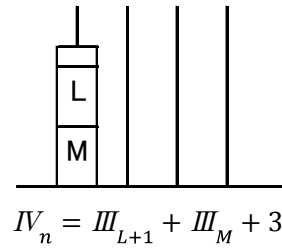
(i)



n	IV_n	L
2	3	1
3	5	2
4	9	3

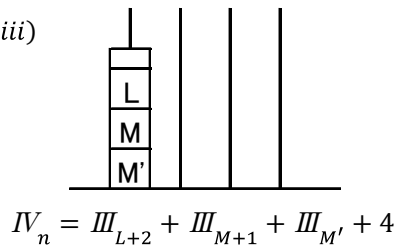
- ・(i)では $n = 4$ のとき $L = 3$ となり、分割しても同じ手順数をとるので、(ii)にも $n = 4$ を表示する。
- ・(i)では $n = 5$ のとき $L = 4$ となるので分割し、(ii)に $n = 5$ を表示する。

(ii)



n	IV_n	L+1	M
4	9	2	2
5	13	3	2
6	17	3	3
7	25	4	3
8	33	4	4

(iii)



n	IV_n	L+2	M+1	M'
7	25	3	3	3
8	33	4	3	3
9	41	4	4	3
10	49	4	4	4
11	65	5	4	4
12	81	5	5	4
13	97	5	5	5

- ・(ii)では $n = 9$ のとき $L + 1 = 5$ すなわち $L = 4$ となるので分割し、(iii)に $n = 9$ を表示する。
- ・(ii)では $IV_n = III_{L+1} + III_M + 3$ となるので、 $L + 1$ と M をできるだけ近い値にすると最小手順となる。同様に(iii)では、相加平均と相乗平均の不等式から $L + 2$ 、 $M + 1$ 、 M' をできるだけ近い値にすると最小手順となる。

ここで、分割の仕方が1通りしかない n を質の良い n と定義する。※ただし、 $n = 2$ は例外とする。

$x = 4$ における質の良い n は1, 3, 6, 10...となり、これらは、塔の上から順に1, 2, 3, 4...枚と分割される。

さらに、質の良い n を小さい順に $s = 1, s = 2 \dots$ と定義し、また質の良い n は、それを越えない最大の質の良い n と s の値が一致するものと定義する。

3 ページの表より、 n の値が 3~6 間で 1 ずつ上がっていくとき、 2^2 が 2^3 に変わっていく(表の右側の値が 2 から 3 に変わるため)ので IV_n は 2^2 ずつ増える。

n の値が 6~10 間で 1 ずつ上がっていくとき、 2^3 が 2^4 に変わっていくので IV_n は 2^3 ずつ増える。

すなわち、質の良い n 間では 2^s ずつ IV_n が増加する。

また、質の良い n の分割の仕方に着目し、塊の動かし方を考える。

質の良い n は、塔の上から順に 1, 2, 3, 4...枚と分割されるので、

$n = 3$ のとき、まず 4 本の柱を用いて 1 枚の円盤を動かし、次に残りの 3 本で 2 枚の円盤を動かす。

最後に、初めに動かしした 1 枚を 4 本の柱を用いて動かすので、 $IV_3 = 2IV_1 + III_2$

$n = 6$ のとき、まず 4 本の柱を用いて $3(= 1 + 2)$ 枚の円盤を動かし、次に残りの 3 本で 3 枚の円盤を動かす。最後に、初めに動かしした 3 枚を 4 本の柱を用いて動かすので、 $IV_6 = 2IV_3 + III_3$

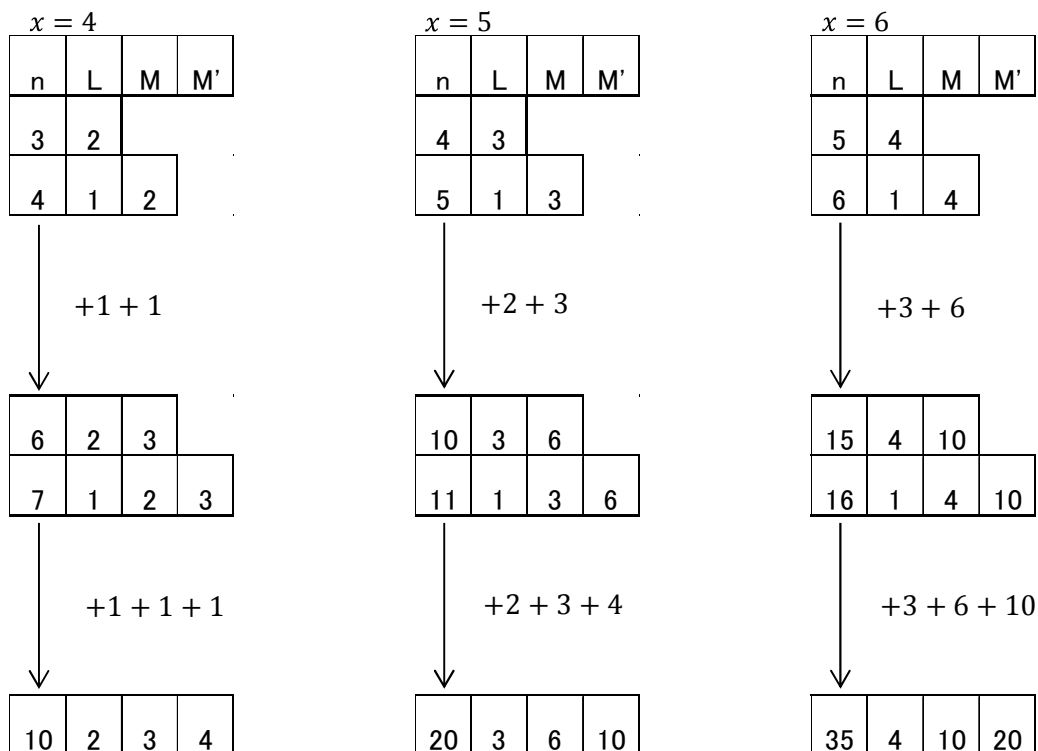
$n = 10$ のとき、まず 4 本の柱を用いて $6(= 1 + 2 + 3)$ 枚の円盤を動かし、次に残りの 3 本で 4 枚の円盤を動かす。最後に、初めに動かしした 6 枚を 4 本の柱を用いて動かすので、 $IV_{10} = 2IV_6 + III_4$

以上の性質を用いて IV_n を一般化すると、

$$IV_n = \left\{ n - \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right]^2 - \left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right] \right) - 1 \right\} \cdot 2^{\left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor} + 1$$

3. 各 x における質の良い n

ここでは、 L をできるだけ分割して、同様に表を作成し考察する。

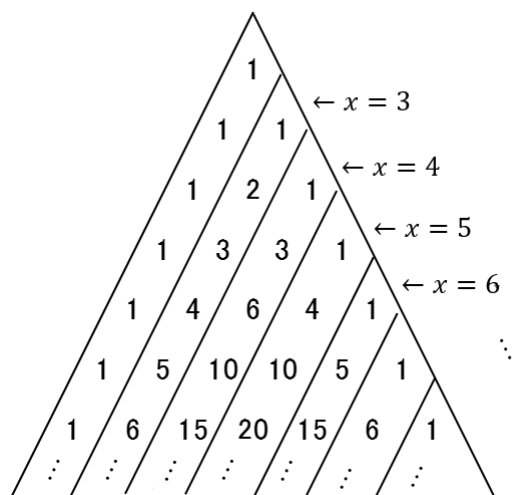


前ページの表から、次のことが分かった。

$x = 5$ における質の良い n は、1, 4, 10, 20… すなわち、 $x = 4$ における質の良い n の総和。

$x = 6$ における質の良い n は、1, 5, 15, 35… すなわち、 $x = 5$ における質の良い n の総和。

よって、各 x における質の良い n は次のように表せる。



・左図のようにパスカルの三角形を斜めに見たときの数列は、各 x での質の良い n と一致する。

・また、 $x = 3$ における質の良い n は、すべての自然数と考えることもできる。

H_n と同様に計算から、柱が x 本、円盤が n 枚のハノイの塔の最小手順の数は、

$$n = s + x - 3 \mathbf{C}_{x-2} + r$$

としたとき、

※ただし、 x は $x \geq 3$ となる整数、 n は自然数、 r は非負整数で、 s は上の式を満たす最大の自然数とする。

$$\sum_{k=1}^s k + x - 4 \mathbf{C}_{x-3} \cdot 2^{k-1} + r \cdot 2^s$$

で求められる。

今後の課題

今回の研究で、質の良くない n では分割の仕方が複数通りあり最小手順をとる円盤の動かし方が複数通りあることがわかった。

それが一体、何通りあるのかについても考察したい。

また、柱が x 本、円盤が n 枚のハノイの塔の最小手順の数を表す式を別の方法で求められるかどうかを検討したい。

		4 3	2 1					
		1 2	3 4					
	4 1	1 2	3 4	4 1				
	2 3	3 4	1 2	2 3				
	3 2	2 1	4 3	3 2				
	1 4	4 3	2 1	1 4				
		4 3	2 1					
		1 2	3 4					

②立方体の向きを固定せずに考える場合

面の向きを固定せずに考えると 6 種類の並べ方がある

向きを変えたときに並べ方が同じになるもの(a1 は点対称の図形である)

$a1 \{ a1, \text{a1}, \text{1e}, \text{2} \}$ $a2 \{ a2, \text{2}, \text{2e}, \text{2} \}$

$a3 \{ a3, \text{3}, \text{3e}, \text{3} \}$ $a4 \{ a4, \text{4}, \text{4e}, \text{4} \}$

$d2 \{ d2, \text{2}, \text{2e}, \text{2} \}$ $d4 \{ d4, \text{4}, \text{4e}, \text{4} \}$

文字の向きが変わっているものは 1 ページの図の文字で表したパターンをその向きに回転させたものである。

①で見つけた 32 通りの並べ方の中で回転させると同じになるものをまとめていく。

最終的に残ったものを $a1, a2, a3, a4, d2, d4$ だけで表し、それぞれのパターンで立方体を転がしても一致しないものが何通りあるかを調べる。

各面の 4×4 数独の組合せは次の 6 タイプとなった。

A	B	C
d4	d2	a4
a4 a1 a4 a1	a1 a1	2p a2 d2 a3
d4	2p	4e
D	E	F
d4	d4	a4
a2 a2 a2 a2	a3 a3 a3 a3	a4 a4 a4 a4
d4	d4	a4

この結果 A の組合せ 12 通り、B の組合せ 12 通り、C の組合せ 12 通り、D の組合せ 3 通り、

E の組合せ 3 通り、F の組合せ 2 通りの合計 **44 通り**となった。

③展開図を表に折ったときと裏に折ったときを 1 通りとまとめる場合

②で見つけた 44 通りの中から、裏返すと同じになる組み合わせやどちらに折っても全く同じになるものを見つける。

- ・ A,B,C ではそれぞれ半分の数になる
- ・ D を裏返すと E と同じになる
- ・ F ではどちらに折っても全く同じになる

この結果合計 **23 通り** となった。

＜考察と結果 2＞ 1 通りに決まるヒントの最小数を調べる

考察の結果 A,F パターンでは 6 個、B,C,D,E パターンでは 5 個入れたときに 1 通りに決まる最少の配置数となる。

ヒント数 6 個の例

答え

ヒント数 5 個の例

答え

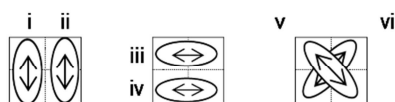
＜考察と結果 3＞ 数字を入れ替えたときの法則

配置の総数については 1-②の結果の 44 通りを採用し、A~F それぞれに 1234 の数字の入れ方に応じて A1~F2 までの通し番号を付けた。

初めに、ある 1 つの数独の中の 2 個の数字を入れ替えると、22 個または 46 個の数字が自動的に入れ替わることがわかった。

- ・ 入れ替え操作

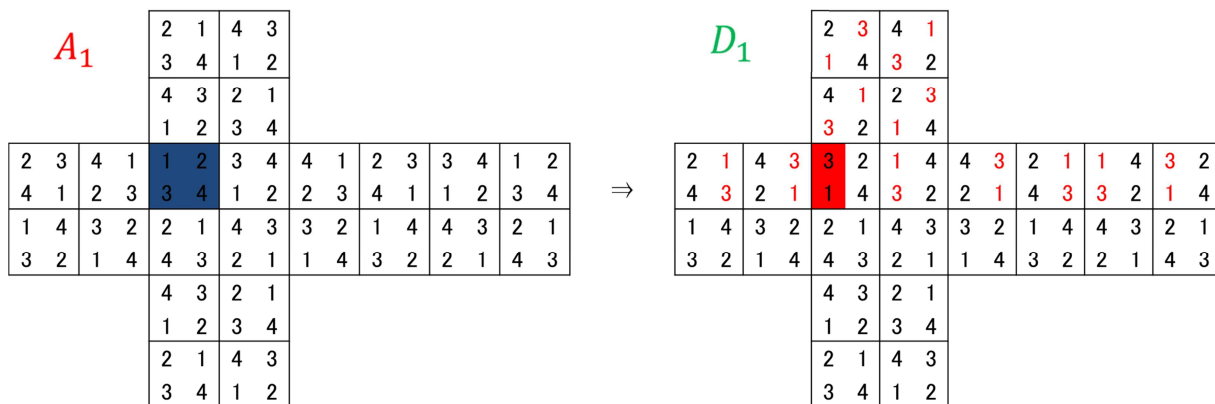
(入れ替え操作は 1 つのブロックの中で行い、全部で 6 種類ある)



・入れ替えを行うブロック

入れ替えを行う面を数字で表し、(1 は上面、6 は下面)

入れ替えを行うブロックの位置を $\alpha \beta \gamma \delta$ (左上から反時計回りの順番) で表した。



上図

左の数独の 1α (青色部分) で i の操作 (1 と 3 の入れ替え操作) をすると 22 個の数字が入れ替わり、 D_1 となった。
この操作を $A_1 * 1\alpha i \rightarrow D_1$ と表した。

A_1 からの他の操作 (全て合計 24 個の数字が入れ替わる)

$A_1 * 1\alpha ii \rightarrow E_1$, $A_1 * 1\alpha iii \rightarrow C_5$, $A_1 * 1\alpha iv \rightarrow C_{12}$, $A_1 * 1\alpha v \rightarrow B_{12}$, $A_1 * 1\alpha vi \rightarrow B_9$

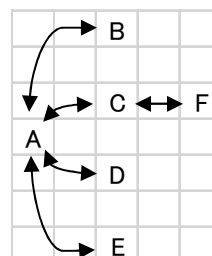
$A_1 * 1\beta i \rightarrow D_1$, $A_1 * 1\beta ii \rightarrow E_1$, $A_1 * 1\gamma iii \rightarrow C_{12}$, $A_1 * 1\gamma iv \rightarrow C_5$

$A_1 * 6\alpha v \rightarrow B_{12}$, $A_1 * 6\alpha vi \rightarrow B_1$

結果 A はこれらの操作で B, C, D, E となる。

また、数字の入れ替えと $A \sim F$ の関係について右の図の
法則があるとわかった。

(B, C, D, E には入れ替えても並び方が変化しない場合がある)

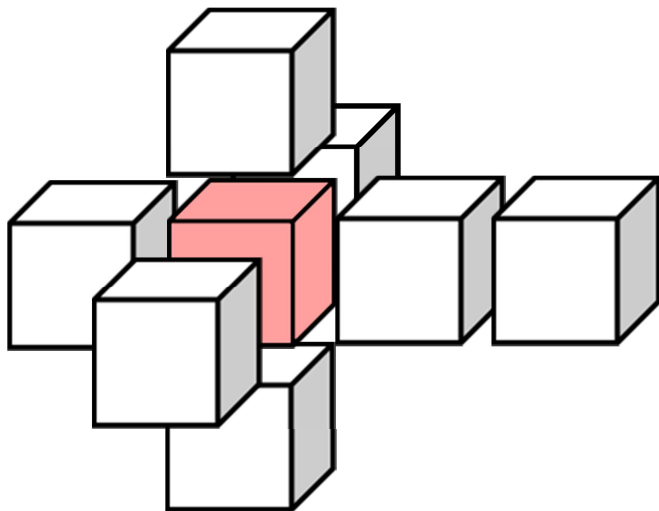


数字の入れ替えによる数独の変化

	$*6 \alpha v$	$*6 \alpha vi$	$*1 \gamma iii$	$*1 \gamma iv$	$*1 \beta i$	$*1 \beta ii$		$*1 \beta i$
A1	B12	B1	C12	C5	E1	D1	C1	F1
A2	B11	B2	C12	C3	E2	D2	C2	F2
A3	B9	B3	C9	C6	E3	D3	C3	F2
A4	B8	B4	C9	C1	E2	D2	C4	F1
A5	B7	B5	C10	C4	E3	D3	C5	F1
A6	B10	B6	C10	C2	E1	D1	C6	F2
A7	B7	B5	C11	C5	E2	D2	C7	F2
A8	B9	B3	C11	C3	E1	D1	C8	F1
A9	B4	B8	C4	C7	E1	D1	C9	F2
A10	B6	B10	C6	C8	E2	D2	C10	F1
A11	B12	B1	C8	C1	E3	D3	C11	F1
A12	B2	B11	C2	C7	E3	D3	C12	F2

<考察と結果 4> 四次元数独への考察

三次元数独を基にして四次元数独の作成を試みたが作成不可能であることがわかった。



・正八胞体の三次元展開図

①

			1	1	2
			3	3	4
				3	4

②

1	1	4		4	1	1	2
3	3	2		2	3	3	4
3						3	4
2						2	1
						2	1
						3	4
			2	3	3	4	

③

	1	1	4		4	1	1	2
	3	3	2		2	3	3	4
4	3						3	4
4	3						2	1
2								
							2	1
							3	4
				2	3	3	4	
						1	1	

四次元数独が作成不可能である理由

接続する $2 \times 2 \times 2$ の立方体 3 つで考える。

①一つの立方体の一面に数字を入れる。

②そのまわりの他の面に数字が入る。

③ 接続する 2 つの立方体に数字が写る。

④2 つの立方体に入る数字をそれぞれ入れると同じ数字が入るべき場所に違う数字が入ってしまう。

(図の赤色部分)

<今後の展望>

数字を入れ替えたときの法則を 1-①の結果を採用したときについて調べる。

循環小数における循環節の規則性

Rules of repetend in recurring decimals

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

伊達 まどか

目的

コンピューターのプログラミングに使われるアルゴリズムに循環小数が使われているのを知り興味を持った。そのため循環節の桁数の規則性について調べた。

考察

x を素数としたときの $1/x$ を考える。

$1/x$	値	桁数
$1/3$	$0.\dot{3}$	1
$1/7$	$0.14285\dot{7}$	6
$1/11$	$0.\dot{0}9$	2
$1/13$	$0.\dot{0}7692\dot{3}$	6
$1/17$	$0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$	16
$1/19$	$0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$	18
$1/23$	$0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$	22
$1/31$	$0.\dot{0}3225806451612\dot{9}$	15
$1/37$	$0.\dot{0}27$	3
$1/41$	$0.\dot{0}2439$	5

1. 桁数が偶数の場合

循環節の桁数が偶数の場合、その数を二つに分けて足すと全ての桁の数が 9 になる。

たとえば、 $1/7$ の循環節は 1 4 2 8 5 7 で

$$142 + 857 = 999$$

である。

実際、

$$\begin{array}{r} 10^6/7 = 142857.142857\cdots \\ -) \quad 1/7 = 0.142857\cdots \\ \hline (10^6 - 1)/7 = 142857 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10^3/7 = 142.857142\cdots \\ -) \quad 1/7 = 0.142857\cdots \\ \hline (10^3 - 1)/7 = 142.714285\cdots \end{array}$$

上の結果から、

$$(10^3 + 1)(10^3 - 1) = 7 \times 142857$$

また、 $(10^3 - 1)/7 = 142.7142\cdots$ なので、 $10^3 - 1$ は7の倍数ではない。

よって、 $10^3 + 1$ が7の倍数である。

計算すると、

$$\begin{array}{r} 10^3/7 = 142.857142\cdots \\ +) \quad 1/7 = 0.142857\cdots \\ \hline (10^3 + 1)/7 = 142.999999\cdots \\ = 142 + 0.\dot{9} \\ = 143 \end{array}$$

よって、小数の部分に9が循環する。

2. 桁数が奇数の場合

次に桁数が奇数の場合について考察した。

$1/37$ の循環節は027で、桁数は3である。

$$\begin{array}{r} 10^3/37 = 27.027027\cdots \\ -) \quad 1/37 = 0.027027\cdots \\ \hline (10^3 - 1)/37 = 27 \\ 10^3 - 1 = (10 - 1)(10^2 + 10 + 1) = 27 \times 37 \end{array}$$

よって、 $10^2 + 10 + 1$ は37の倍数である。

$(10^2 + 10 + 1)/37$ を計算すると

$$\begin{array}{r} 10^2/37 = 2.70270\cdots \\ 10/37 = 0.27027\cdots \\ +) \quad 1/37 = 0.02702\cdots \\ \hline (10^2 + 10 + 1)/37 = 2.99999\cdots \\ = 2 + 0.\dot{9} \\ = 3 \end{array}$$

値は整数3になる。

3. 一般化

今までの式を文字に置き換えて考えた。

循環節の桁数が偶数の場合

$1/X$ の循環節の桁数を $2N$ 、循環節の数字を C とすると

$$C = (10^{2N} - 1)/X$$

よって、 $(10^N + 1)(10^N - 1) = CX$

例1、例2より $10^N - 1$ は X の倍数ではないので、 $10^N + 1$ が X の倍数である。

循環節の桁数が奇数の場合

$1/X$ の循環節の桁数を $2N+1$ 、循環節の数字を C とすると

$$C = (10^{2N+1} - 1) = (10 - 1)(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2N})/X$$

$$CX = (10 - 1) \sum_{k=1}^{2N+1} 10^{k-1}$$

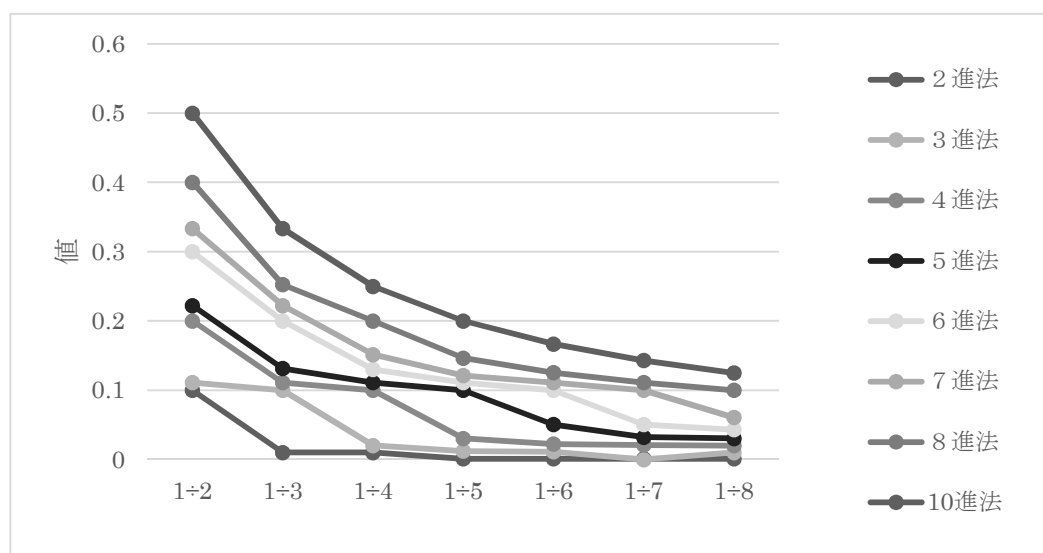
よって、 $\sum_{k=1}^{2N+1} 10^{k-1}$ は X の倍数になる。

n 進数の循環節

n 進法で表した循環節を表に示す。

10 進法	2 進法	3 進法	4 進法	5 進法
1/2	0.1	0.1̄	0.2	0.2̄
1/3	0.01̄	0.1	0.1̄	0.13̄
1/4	0.01	0.02̄	0.1	0.1̄
1/5	0.000111̄	0.012̄	0.03̄	0.1
1/6	0.001̄	0.01̄	0.02̄	0.05̄
1/7	0.001̄	0.010212̄	0.02̄	0.032̄
1/8	0.001	0.01̄	0.02	0.03̄

10 進法	6 進法	7 進法	8 進法
1/2	0.3	0.3̄	0.4
1/3	0.2	0.2̄	0.25̄
1/4	0.13	0.15̄	0.2
1/5	0.1̄	0.12̄	0.1463̄
1/6	0.1	0.1̄	0.125̄
1/7	0.05̄	0.1	0.1̄
1/8	0.043	0.06̄	0.1



n 進法するとき、10進法で $1/(n-1)$ の値は $0.\dot{1}$
表を斜めで見ると 1.2.3...のような規則性が見える。

今後の課題

上の式を二つの文字で表したい。
他にも何か規則性があるか探してみたい。
循環節の桁数の最大値の変化に規則性があるか調べたい。
 n 進数でのグラフから新たに新しい規則性を見つけたい。

反省・感想

計算に多くの時間がかかってしまい、証明したかった規則性を考える時間が少なくなってしまった。

しかし、10進法での循環節の規則性の証明が分かったので良かった。また自分がやりたかった身近な分野を扱えて満足する研究となった。

四次元ルービックキューブで解の最小手数を求めるアルゴリズム

The algorithm to get minimum number of steps for solving of 4-dimensional Rubik's Cube

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

長谷川 世波

はじめに

元々は自分の趣味として存在していたルービックキューブだが、数学の、主に群論の分野に深い関わりがあると知り、今回の研究の発端となった。しかし、通常のルービックキューブは既に研究がされ尽くされていたため、インターネット上に存在していた四次元のルービックキューブを研究しようという考えに至った。今回使用したキューブモデルも、それを引用したものである。

目的

ルービックキューブを四次元に拡張し、存在し得る全ての配置から、解を得るまでの手数の下限値を求める。

そこで、三次元で下限値に近い値を出せる、シスルスウェイト法を四次元に適用しようと試みた。

1. シスルスウェイト法とは

ルービックキューブの各単位操作をそれぞれ U D L R F B とし、段階ごとに場合分けをする。（それぞれ上、下、左、右、前、後の列を時計回りに 90° 回転させる操作を表す。これをシングマスター記法と言う。）すると、ルービックキューブの状態を、以下の段階に分類することができる。

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle R, L, F, B, U^2, D^2 \rangle \\ G_2 &= \langle R, L, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle \\ G_3 &= \langle R^2, L^2, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle \\ G_4 &= \langle 1 \rangle \end{aligned}$$

$\langle \rangle$ 内はその段階において可能な操作を表し、2乗された記号は、その記号が示す操作を2回続けて行うことに等しい。例えば U^2 なら、上の列を 180° 回転させることを意味する。

また、 G_4 における 1 は完成形を表し、この状態が目標とする最終段階となる。

G_4 を除く上記3つのグループはそれぞれ、

$$\begin{aligned} R \cdot L \cdot F &= (R \cdot L) \cdot F = R \cdot (L \cdot F) && \text{(結合律)} \\ R^4 &= L^4 = F^4 = B^4 = U^4 = D^4 = I && \text{(単位元)} \\ R^{-1} \cdot R &= I && \text{(逆元)} \end{aligned}$$

というように群公理を満たしているため、群であるといえる。

初期の状態を G_0 とすると、

$$G_0 = \langle R, L, F, B, U, D \rangle$$

$$G_4 \subset G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$$

となり、それぞれ前段階の部分群である。完成に至るまでの手順としては、 G_0 から G_1 、 G_2 、 G_3 と段階を経て、完成形である G_4 まで持っていく。 G_0 から G_1 までは7手、 G_1 から G_2 までは13手、 G_2 から G_3 までは15手、 G_3 から G_4 までは17手あれば解けると知られている。よって、 $7 + 13 + 15 + 17 = 52$ 手が、この方法でだせる三次元の下限值にもっとも近い値である。（現在はコンピュータによって20手あれば解けるとされている。）

考察

1. シスルスウェイト法に対する考察

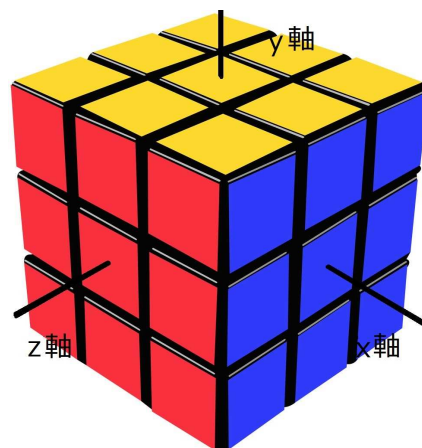
シスルスウェイト法が、どのような思考を基にしたアルゴリズムなのかを考える。

まず、右図のようにx軸、y軸、z軸をとる。

このとき、中心を貫通している軸がx軸、y軸、z軸の面をそれぞれ、x軸所有の面、y軸所有の面、z軸所有の面と呼ぶことにする。

すると、UとDはx軸所有面とy軸所有面の置換であり、FとBはz軸所有面とx軸所有面、RとLはy軸所有面とz軸所有面の置換であると言い換えることができる。

この3種類の置換のうち、二面体を反転させるには3つの置換が、三面体をひねるには2つの置換が必要である。シスルスウェイト法は、 90° 回転からなる置換群を 180° 回転からなる準同型写像にすることで、これら3種類の置換を順に制限し、三面体、二面体を段階的に揃えていくことで完成形に持っていくアルゴリズムであると考えられる。

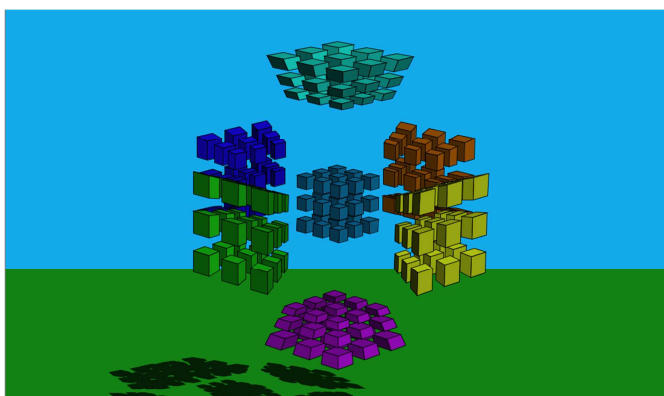


(加工元: Free Download Web)

2. 四次元ルービックキューブの導入

三次元のキューブの全体像は立方体だったのに対し、四次元の全体像は正八胞体を表す。したがって、三次元の単位操作が正方形の回転だったのに対し、四次元の単位操作は立方体の回転を表す。このとき、任意の立方体を回転させると、その立方体に接している面も回転する。

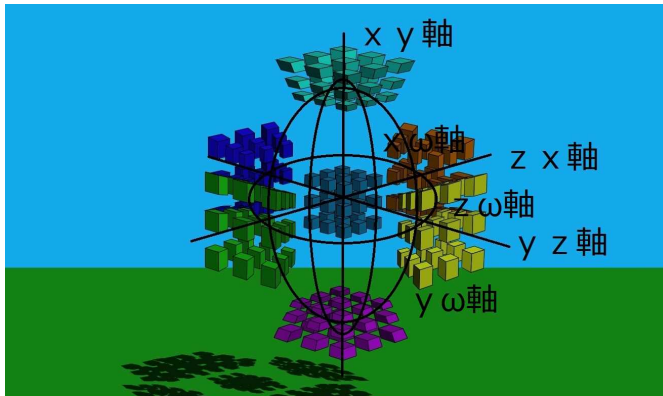
なお、小さいキューブを小キューブ、小キューブが集まって形成されている立方体は大



キューブと便宜的に呼ぶことにする。また、成している小キューブの数に合わせて、各ユニットを一、二、三、四胞体と定義し、中央と外側の大キューブを ω 軸所有の胞、右と左の大キューブをx軸所有の胞、前と後ろの大キューブをy軸所有の胞、上と下の大キューブをz軸所有の胞とする。（四次元において直交する座標軸は4本ある。）

3. 四次元への応用

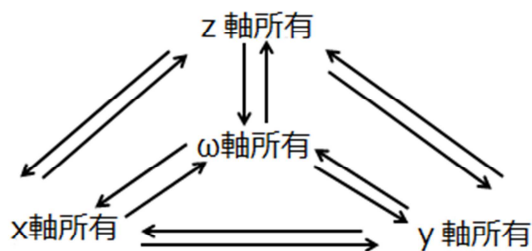
単位操作を記号化するため、以下のように6つの回転軸をとる。



黄色の大キューブを右、青緑の大キューブを上部に固定し、右の大キューブを $y z$ 軸中心に回転させた場合を $R y z$ 、 $z \omega$ 軸中心に回転させた場合を $R z \omega$ というように、大キューブの位置と回転軸の2つの記号を用いて単位操作を表すと

$H O = \langle C x y, C y z, C z x, O x y, O y z, O z y, R y z, R y \omega, R z \omega, L y z, L y \omega, L z \omega, F z x, F x \omega, F z \omega, B z x, B x \omega, B z \omega, U x y, U x \omega, U y \omega, D x y, D x \omega, D y \omega \rangle$

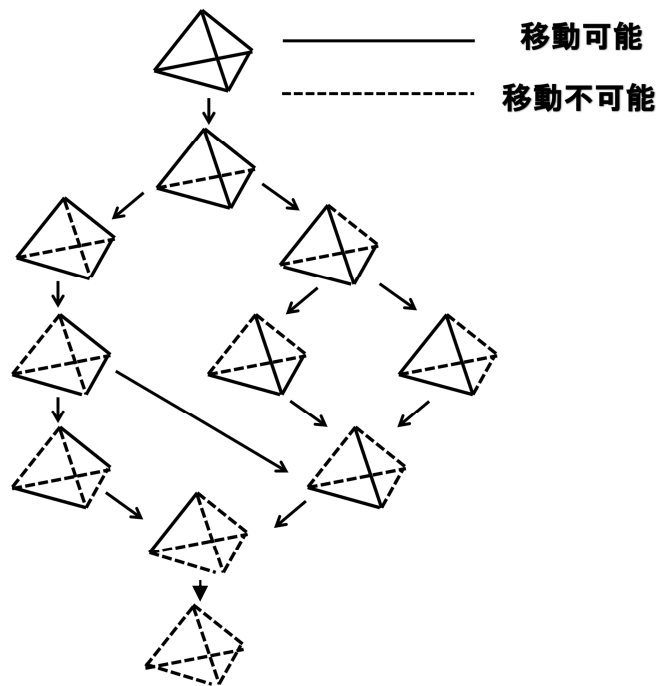
所有軸間の小キューブの移動を表すと、以下のような図になる。



これは立体モデルだと四面体となる。

シスルスウェイト法を応用するために、二胎体、三胎体、四胎体にも反転、捻りの概念がないかを調べる。小キューブは一色のみなので、単純にそれ自身の色によつての識別は不可能だとわかる。

そこで、接している小キューブの色による識別を試みた。四次元ルービックキューブの性質上、単位操作はすべて大キューブと、それに接している面の回転によるものだから、各多胞体を構成している小キューブ同士は常に接していることがわかる。したがって、この対応する小キューブ同士の配置から、各多胞体の向きを識別可能にした。これらもまた、各所有軸間の移動によって向きが変わるので、四面体の図で段階ごとに場合分けをすると下図のようなフローチャートで表せる。



結論

小キューブの位置関係によって、反転、捻りの概念を定義することができた。また、6本の回転軸と4本の座標軸を定義づけ、所有軸間の移動に着目することでシスルスウェイト法を応用した四次元のアルゴリズムを生成できた。

今後の課題

三次元のアルゴリズムを四次元に応用するところまでは成功したので、プログラミングを学ぶなどして、下限値を出したい。

また、多胞体が反転する条件、ひねられる条件から、最も理に適ったアルゴリズムを生み出したい。

参考文献

I. グロスマン, W. マグナス著 (浅野啓三訳) 『群とグラフ』

David Joyner 著 (川辺治之訳) 『群論の味わい ～置換群で解き明かすルービックキューブと15パズル～』

「Magic Cube 4D」 (<http://superliminal.com/cube/cube.htm>)

砂糖がゼリーの弾性に与える影響

The influence by Sugar on the Elasticity of jelly

千葉県立船橋高等学校普通科 3 年

二宮 朝日菜

前原 春佳

Abstract

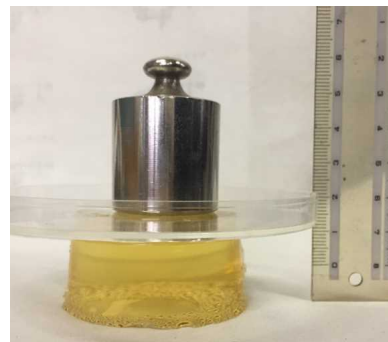
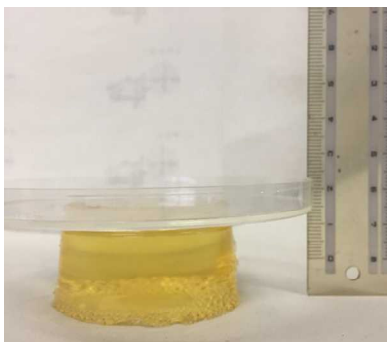
We wanted to find influence by sugar concentration, temperature, solvents. When we chose higher concentration 10% or more, the influence by sugar appeared clearly. When we chose higher temperature, jelly became softer. The jelly containing sugar was harder than the jelly with no sugar at any temperature. When we put into ethanol, influence of sugar diminished. While when we put jelly into acetone, influence of sugar stayed.

はじめに

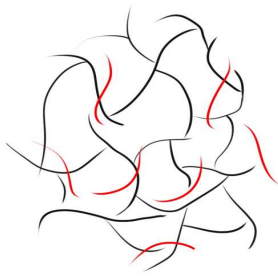
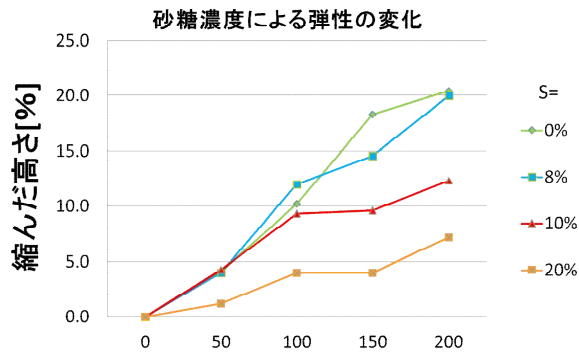
先輩の研究より、ゼリーをエタノールに浸すと浸透圧の影響でゼリーの弾性が大きくなることがわかった。そこで、ゼリーの弾性というテーマに興味を持ち、市販のゼリーの主な原料の 1 つである砂糖の含有量を変化させることで好みの硬さのゼリーを作りたいと思い、この研究を行った。

弾性の測定方法

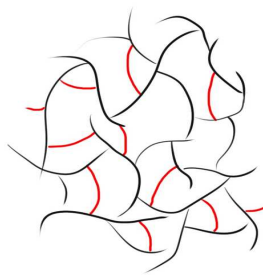
ゼリーに 50g、100g、150g、200g の重りをのせてゼリーの高さを測定し、何ものせていないゼリーの高さを 100%として、重りをのせた時の沈んだ分の高さを%で表した。沈む高さが小さいほうがゼリーの弾性力は大きいと判断した。



事前研究より、砂糖にはゼリーの弾性を大きくする働きがあり、砂糖を含むゼリーは砂糖を含まないゼリーより弾性が大きくなることがわかった。これは砂糖が加わることでゼラチンに含まれる OH が作る水素結合が、より複雑で強固になったためだと推測した。また、砂糖濃度が 10%以上になるとゼリーの弾性は大きくなり、砂糖の効果が顕著に見られた。



砂糖濃度 10%未満



砂糖濃度 10%以上

実験 1

目的

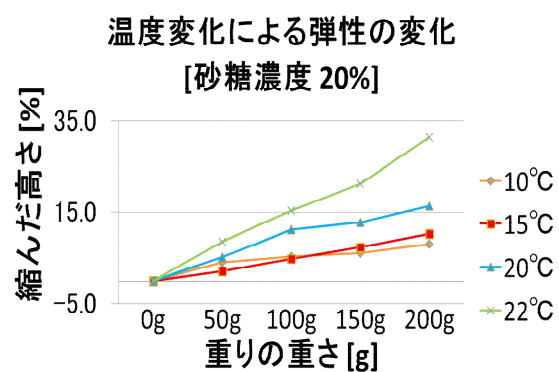
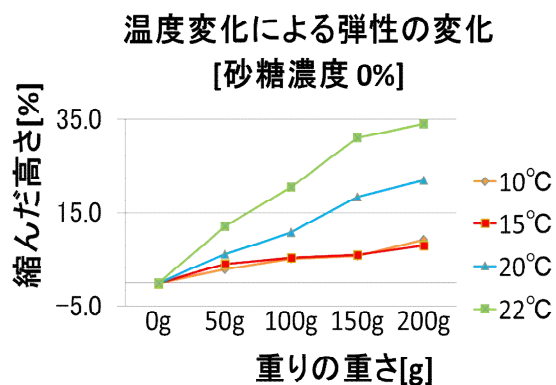
温度により砂糖がゼリーの弾性に与える効果がどう変化するか調べる

方法

砂糖濃度 0%、20%のゼリーを作り、10℃、15℃、20℃、22℃におけるゼリーの弾性を調べる

結果

- ・温度が上がるとゼリーの弾性は小さくなった
- ・どの温度においても砂糖の効果は保たれた



考察

砂糖の効果は温度変化に影響を受けにくい

実験 2

目的

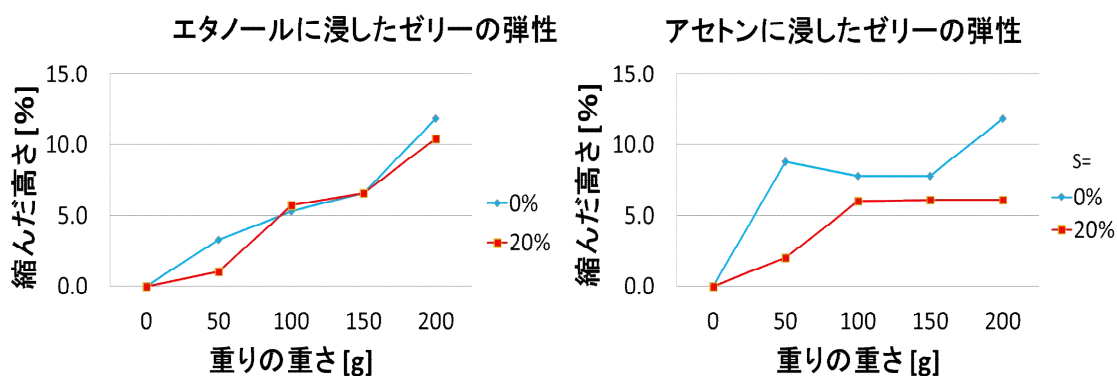
浸す有機溶媒により、砂糖がゼリーの弾性に与える効果がどう変化するか調べる

方法

砂糖濃度 0%、20%のゼリーを作り、それぞれ濃度 70%のエタノール、アセトンに浸した後、ゼリーの弾性を調べる

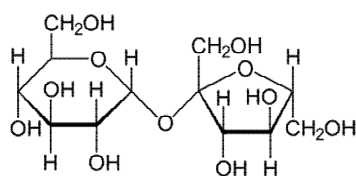
結果

- ・エタノールに浸したゼリーには砂糖の効果は見られなかった
- ・アセトンに浸したゼリーは砂糖の効果を保たれた

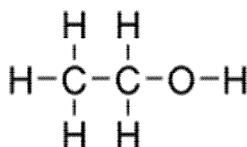


考察

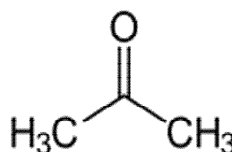
エタノールに含まれる OH が砂糖に含まれる OH に置き換わり、ゼラチンと砂糖の強固な水素結合がほどけたため、エタノールに浸したゼリーでは砂糖の効果が失われた。一方で、アセトンは OH を含まないため、アセトンに浸したゼリーではアセトンと砂糖が置き換わらず、砂糖の効果が保たれたと推測した



砂糖の構造式



エタノール



アセトン

実験3

目的

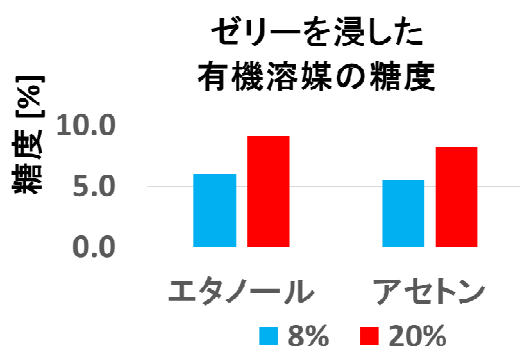
砂糖を含むゼリーを浸した後のエタノール、アセトン中における糖度を計測する

方法

砂糖濃度 8%、20%のゼリーを作り、それぞれ濃度 70%のエタノール、アセトンに浸す。その後、溶媒を 1 ml ずつペトリ皿にとり、乾燥させる。そのペトリ皿にそれぞれ 0.5ml のイオン交換水を加え、糖度計を用いて糖度を計測する。

結果

8%、20%のゼリーともにエタノール中の糖度はアセトン中の糖度より高かった



結論

- ・砂糖にはゼリーの弾性を大きくする働きがある
- ・その効果は砂糖濃度 10%以上で顕著に見られる
- ・砂糖の効果は温度変化による影響を受けにくい、エタノールに浸したゼリーにおいて効果は失われ、アセトンに浸したゼリーにおける砂糖の効果は保たれた。これらの砂糖の効果にはゼラチン、砂糖による水素結合の強度が関係すると考えられる。

今後の課題

砂糖濃度の変化で、ゼリーの弾性を自由に調節し、好みの固さのゼリーを作る

参考文献

- 佐藤あみ (2015) 「ゼラチンをエタノールに浸けたときの直径、硬さ、質量の変化」
中野遥 (2015) 「ゼラチンをエタノールに浸けたときの直径、硬さ、質量の変化」



黄銅の腐食のメカニズム

The mechanism of corrosion on brass

千葉県立船橋高等学校普通科 3 年

長谷川 咲希

Abstract

Brass is an alloy of copper(Cu) and zinc(Zn). The mechanism of corrosion on alloys, such as brass, has not been clarified yet, and there are many problems about corrosion on alloys, such as Dezincification corrosion. For preventing such problems, it is important to know how interferences of metals in alloys is. Therefore, I began to explore this mechanism.

First, I examined the easiness of corrosion on Cu and Zn in brass by the difference of pH. I soaked boards of brass and changed pH of each solution. I used Pack Test and a spectrophotometer as the way to measure concentration of Cu and Zn. As a result, Cu corrodes easily in weakly basic solution and does less in strongly basic solution, and Zn corrodes easily in both acidic and basic solution, and Zn may corrode more easily in basic solution than acidic solution on alloys. Next, I examined the influence of amino acid on corrosion. I used the same method as before but I added amino acid solution, instead of water, into each solution. As a result, adding amino acid solution, Cu corrodes more easily in basic solution, and Zn corrodes more easily than my first research in both acidic and basic solution.

I want to clarify the mechanism of corrosion by using boards of pure Cu and boards of pure Zn and solve many problems about corrosion on alloys, such as Dezincification corrosion.

はじめに・研究の目的

黄銅は銅 Cu と亜鉛 Zn の合金であり、水道管や楽器など身近なものに幅広く利用されている。黄銅など合金の腐食のメカニズムはまだはっきりとわかっておらず、合金の腐食については様々な問題があり、そのひとつに脱亜鉛腐食が挙げられる。

脱亜鉛腐食とは、黄銅中の Zn のみが溶け出してしまう腐食である。

脱亜鉛腐食のような腐食に関する問題を解決するには、Cu と Zn の相互作用を理解することが大切であると考え、私は合金の腐食のメカニズムを解明するために研究を始めた。

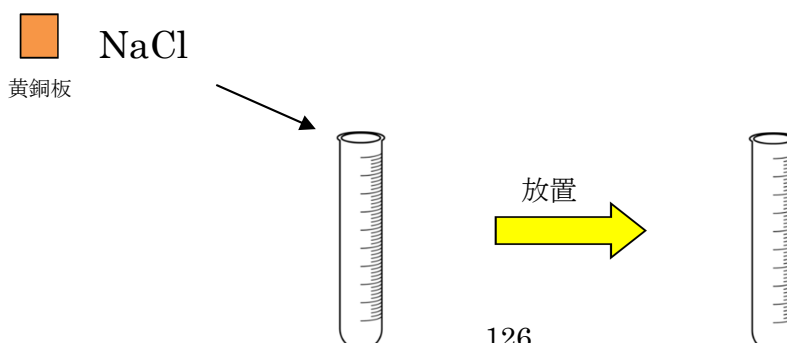
実験

基礎研究

ここでは、pH の違いによって黄銅中の Cu と Zn の溶け出しやすさがどのように変化するかを調べた。

実験 1

pH を変えたそれぞれの溶液に黄銅板を浸し、放置した。



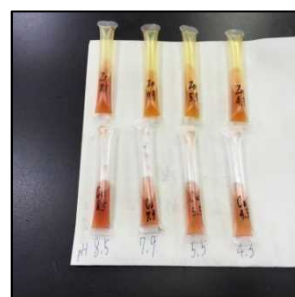
- *それぞれの溶液は、水と塩化ナトリウム (NaCl) から成っている。
- *pH を変えるのに、塩酸 (HCl) と水酸化ナトリウム (NaOH) を用いた。

Cu と Zn の濃度を測定する方法として、パックテストを用いた。

結果 1

pH	4.3	5.5	7.9	8.5
Zn	0.6	0.1	0.2	1
Cu	5	7	10	10 以上

(mg/L)



←Zn

←Cu

↑左から、pH 8.5 7.9 5.5 4.3

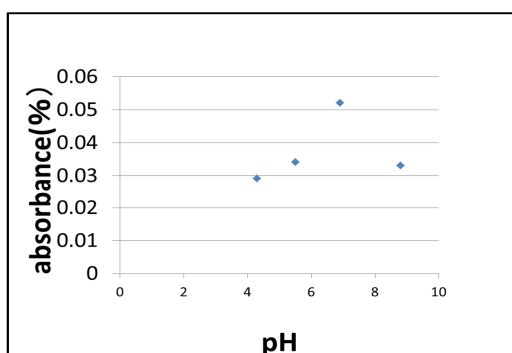
Zn：溶液が中性 (pH7.0) から離れるほど、より多量の Zn が溶けた。

Cu：溶液が塩基性になるほど、より多量の Cu が溶けた。

実験 2

パックテストの代わりに分光光度計を用いて、Cu の溶け出す量のより詳細な値を測定した。

結果 2



Cu は、弱塩基性の溶液でよく溶け、また強塩基性の溶液では溶けにくかった。

考察 1

*実験 1・2 の結果から、Zn は酸性と塩基性の両方で溶けやすく、Cu は弱塩基性でよく溶けて強塩基性で溶けにくいと分かる。

Zn が酸性と塩基性の両方で溶けやすいのは、Zn が両性元素だからだと考える。

*実験 1 の結果 (pH4.3 , 8.5、pH5.5 , 7.9 のときの溶け出した Zn の量をそれぞれ比べて) より、合金において、Zn は酸性よりも塩基性で溶けやすいのではないかと考えた。

応用研究

ここでは、黄銅の腐食におけるアミノ酸の影響を調べた。

実験 3

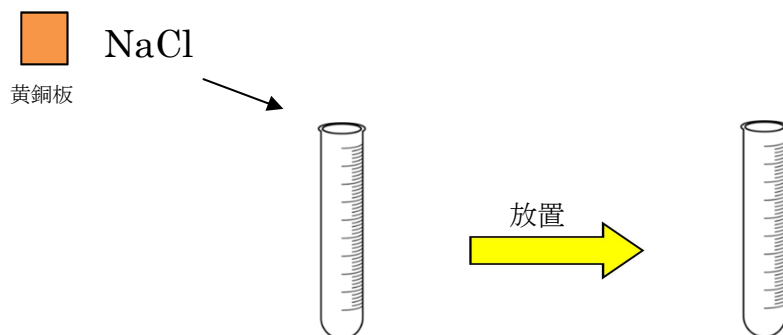
pH を変えたそれぞれの溶液に黄銅板を浸し、放置した。

*それぞれの溶液は、アミノ酸水溶液と塩化ナトリウム (NaCl) から成っている。

*pH を変えるのに、塩酸 (HCl) と水酸化ナトリウム (NaOH) を用いた。

*この実験でアミノ酸を使用したのは、アミノ酸が生活排水や人間の体に含まれるなど、人間と深い関わりのある物質だからである。

また、ここで使用したアミノ酸は、味の素 (グルタミン酸ナトリウム) である。



Cu と Zn の濃度を測定する方法として、パックテストを用いた。

結果 3

pH	4.7	5.6	8.2	8.7
Zn	5 以上	5 以上	5 以上	5 以上
Cu	1.5	4.5	10 以上	10 以上

(mg/L)



←Zn

←Cu

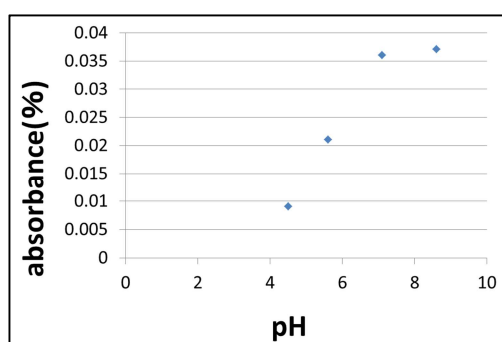
↑左から、pH 8.7 8.2 5.6 4.7

アミノ酸水溶液を加えると、**Zn** は酸性と塩基性の両方で実験 1 より溶けやすくなり、**Cu** は塩基性でより溶けやすくなった。

実験 4

パックテストの代わりに分光光度計を用いて、**Cu** の溶け出す量のより詳細な値を測定した。

結果 4



溶液の塩基性が強くなるほど、**Cu** は溶けやすくなった。

考察 2

アミノ酸を加えると、**Zn** は酸性と塩基性の両方で実験 1 よりも溶けやすく、**Cu** は塩基性でより溶けやすくなった（酸性の状況下での **Cu** の溶け出した量と、塩基性の状況下での **Cu** の溶け出した量の、それぞれの値の差が開いた）。

Cu が酸性であまり溶けやすくなっていない原因については、アミノ酸を加えたことによって、酸性の状況下においては、黄銅上の **Zn** が大量に溶け出してしまい **Cu** が溶け出しにくくなるのではないかと考えた。

このように、アミノ酸が、**Cu** と **Zn** の腐食における相互作用をもたらした可能性が考えられる。

今後の展望

合金（黄銅）上で **Cu** が **Zn** にどのような影響を及ぼしているのか、あるいは **Zn** が **Cu** にどのような影響を及ぼしているのか、すなわち **Cu** と **Zn** の相互作用が、この実験の結果からだけでは分からない。

だから、今後は黄銅板だけではなく、**Cu** 板や **Zn** 板を用いて同様の実験を行いたいと思う。

そして、脱亜鉛腐食のような、合金の腐食に関わる様々な問題を解決する手がかりを発見したいと思う。

月の表面の砂が月の明るさに及ぼす影響

The Influence that the Sand on the Moon's Surface Exerts on the Moon's Brightness

千葉県立船橋高等学校普通科 3 年

高津渚 金子真帆 小林遥香 栢山朱里

はじめに

私たちは月は球体であるにもかかわらず、端が暗くならず、全面が一様に光って見えることを不思議に思い、この研究を始めた。

そこで、その現象の理由として月の表面にある砂が関係しているのではないかと考えた。

※なおこの研究では、半月の明るさのことを **B_H**、満月の明るさのことを **B_F** とする。

目的

月の表面にある砂と月の明るさの間にある関係を調査する。

方法(1)

- ① 望遠レンズを用いて、高度 30° に合わせた満月、半月(上弦・下弦)をそれぞれ撮影する。
- ② “Image J” という画像解析ソフトを用いて撮影した月の表面の明るさを計測・数値化する。
- ③ 満月の明るさと半月の明るさの比を測る。

結果(1)



$$\begin{aligned} B_H : B_F &= 12734901 : 25830990 \\ &= 1 : 2.0246014476 \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

上記の式より、明るさの比がおおよそ 1:2 となったので、満月の明るさは半月の明るさのおおよそ二倍であるといえる。

考察(1)

結果(1)より、私たちは月の明るさには月の表面にある砂の色が関係しているのではないかと考えた。

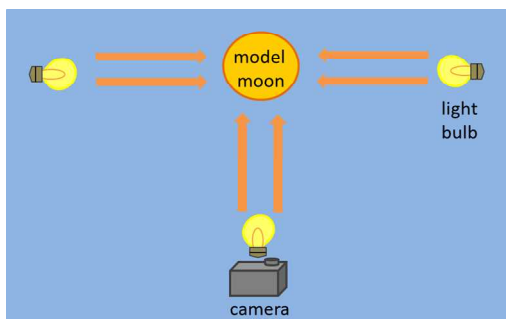
月の表面にある砂は主に有色鉱物(黒)である玄武岩と無色鉱物である斜長石によって構成されている。このことから、私たちは黒い砂と白い砂を用いて次の実験を行った。

方法(2)

- ① 黒い砂と白い砂を混ぜ合わせたものを作る。このとき、黒い砂と白い砂の量の割合を変えることで、色を調整する。
ex) 黒 : 白 = 0 : 10 (白のみ)、1 : 9、2 : 8、… 10 : 0 (黒のみ) の計 11 種類
- ② ①で用意した砂で、月に見立てた発泡スチロール球を覆い、モデル球を作る。
- ③ 白熱電球を用いて球に光を当て、撮影する。
- ④ “Image J”を用いてモデル球の表面の明るさを測る。(結果 2)
- ⑤ 結果(2)より、満月の明るさに対する半月の明るさの割合を表したグラフを作る。

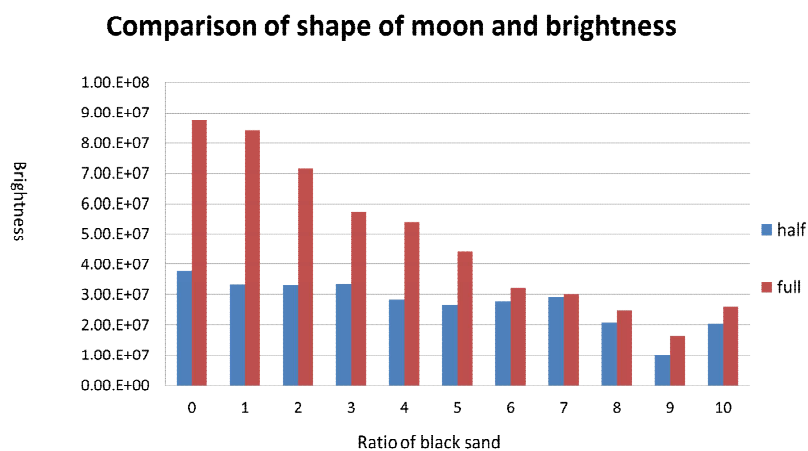


↑ 満月のモデル球(黒 : 白 = 4 : 6)



結果 (2)

グラフ 1



- (1) 黒い砂の割合が大きくなればなるほど、満月の明るさの割合は小さくなる。
- (2) 黒い砂の割合：白い砂の割合＝4:6 のとき、満月の明るさは半月の明るさの約二倍になり、その明るさは実際の月の明るさに最も近くなる。

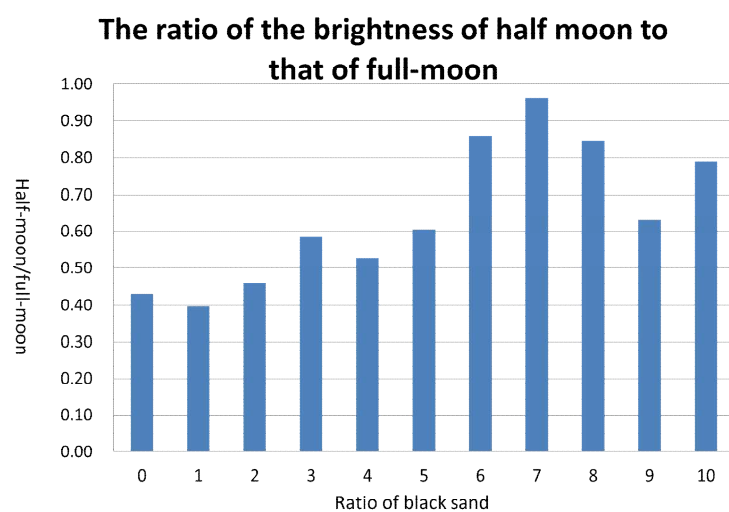
黒い砂の割合：白い砂の割合＝4:6 のときの満月の明るさと半月の明るさの比

$$B_h : B_f = 28394308 : 53917992$$

$$= 1 : 1.898901277$$

$$= 1 : 2$$

グラフ 2



- (1) おおよその形として、黒い砂の割合が大きくなればなるほど、満月の明るさに対する半月の明るさの割合は大きくなる。
- (2) 黒い砂と白い砂の割合が 4:6 のとき、縦軸の値は 0.50 に近づく。

考察(2)

- (1) グラフ①より、黒い砂は白い砂よりも光の反射率が低いことが分かる。つまり白い砂の割合が大きくなるほどより多くの光を反射し、明るく見えるようになる。したがって、含まれる砂の色の比率によって輝度は変化する。
- (2) グラフ②より、玄武岩のような有色鉱物と斜長石のような無色鉱物との比は、実際の月に当たってもおよそ 4:6 であると考えられる。
- (3) (1)(2)より、月の表面を覆う砂が端まで光を反射するので、月は球体であるにもかかわらず端まで明るく、満月の明るさは半月の明るさの 2 倍になると考えられる。

結論

月の表面を覆う砂の色が変わると、明るさもまた同時に変化する。その色ごとの反射率の違いから、私たちは月の端まで明るく見えている。

また、月の表面の砂が含む有色鉱物と無色鉱物の割合はおよそ 4:6 であり、この値を満たすとき、満月の明るさは半月の明るさの 2 倍になる。なおこの現象は発泡スチロールのような月とは異なる球体においても端が暗くなる現象を抑制し、全体を光らせる。

今後の課題

今回の研究では、時間や実験回数、精度まで十分とは言えなかったので、もう少し時間をかけて精錬していきたい。

また、学生という制限もあって、実際には天体に何かしら影響を及ぼしているであろう大気や水分について触れられなかったので、その辺りについても調べてみたい。

加えて、本研究とは少し異なるが、今回の研究では月の実際の構成物質と似せるために用いる砂の色を、有色鉱物・無色鉱物というくくりではあるものの、黒色と白色についてしか見られなかったので、いずれはこの研究を発展させ、他色における反射率の違いやそのときの球体の明るさの状況についても研究してみたい。

円筒形オセロにおける優位性と数学的性質

The Superiority Based on Order and the Nature of Cylindrical Othello Games

千葉県立船橋高等学校普通科 3 年

鈴木 さら

はじめに

オセロは身近なゲームであり、ルールが単純でありながら、奥の深いゲームである。私自身も小さいころから親しんできた。盤面を平面から円筒形にしたら、石を置くことのできるマスが増えるので、より複雑で、ゲームの展開が予測しにくくなるのではないかと考えた。通常の平面オセロにおいては、 4×4 、 6×6 の場合について、既に後手が優位であると示されている。そこで、盤面が円筒形になった場合のゲームの優位性についても調べてみたいと思った。

また、ゲームの勝敗と盤上の石の数の変化には、何か性質があるのではないのかと考え、調べた。

・円筒形盤の作成

4×4 オセロの両端をつなげ、円筒形にする。(図 I)

なお、盤全体の様子は観察しやすくするために 4×4 の展開図で表し、上端と下端がつながっているとした。(図 II)

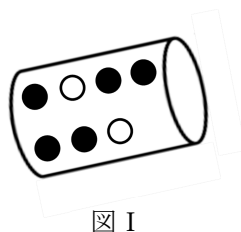


図 I

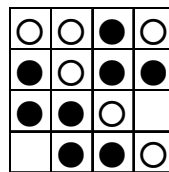


図 II

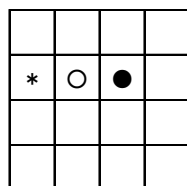
るとした。(図 II)

・ルール

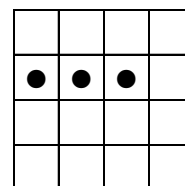
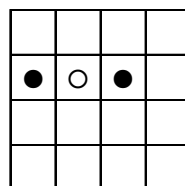
基本的に平面オセロと同じ。表裏に異なる色を塗った石を使用する。

自分の石同士で相手の石を挟むことができるマスに石を置く。

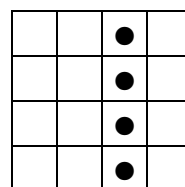
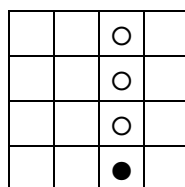
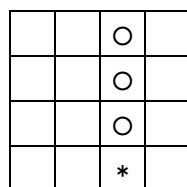
挟んだ石を裏返す。



* 黒が置けるマス



下の図のような場合でも、黒は石を置けるとする。(* 黒が置けるマス)



この場合、実際には 2 つの石で相手の石を挟んでいないので、オセロのルールに適合しているとは

いえないという意見もあるが、今回はこのルールを採用することにした。

1. 先後手によるゲームの優位性

仮定

最後の一手で逆転することが多いため、後手が有利である。

方法

先手は、置くことのできる全てのマスについて、後手は、最善と思われるマスに置いたとき、それぞれ場合分けをしてゲームを進展させていき、最終的なゲームの勝者が後手となるかを調べる。

後手の置く場所については、特に有利なマスがない場合、置くことが可能なマスのうち明らかに不利と思われるマスを除いて調べる。

ただし、回転または反転させたときに一致する場合については、省略した。マスの有利不利の判断には、以下に示す偶数理論を使用した。

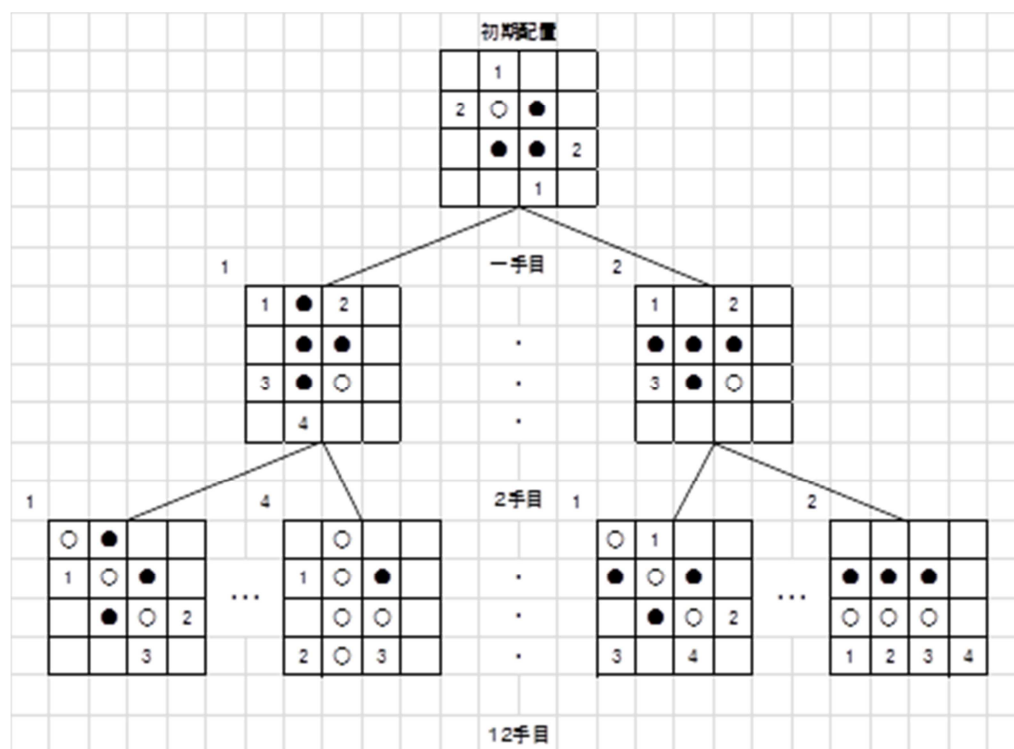
偶数理論

偶数空きに先着するのは悪手、奇数空きに先着するのは好手という考え方。

- ・ 不利な場所 両端の列において、まだマスが埋まっていないか、2マスが既に埋まっている場合。
- ・ 有利な場所 両端の列において、1または3マスが既に埋まっている場合。

ただし、4×4の円筒形オセロにおいては、一手目で端のマスに置くこともできるため、両端の列が2マスまたは3マス埋まっているときについてのみ偶数理論を適用することとした。

結果



考察

一手目で先手が1のマスを選び、二手目で後手が2または3を選んだ場合、また、一手目で先手が2のマスを選び、二手目で後手が1または3を選んだ場合、必ずしも後手が勝つとは言えない。したがって、この場合は後手有利であるとは言えない。

一方、一手目で先手が1のマスを選び、二手目で後手が1または4を選んだ場合、または、一手目で先手が2のマスを選び、二手目で後手が2を選んだ場合は、必ず後手が勝つ。したがって、この場合は後手有利であると言える。

同様のことが、後手の手順の選択肢のマスそれぞれについて言える。

結論

後手が、それぞれの手順で適当なマスを選ぶことができれば、後手有利であるといえる。

2. ゲームの進展における数学的性質

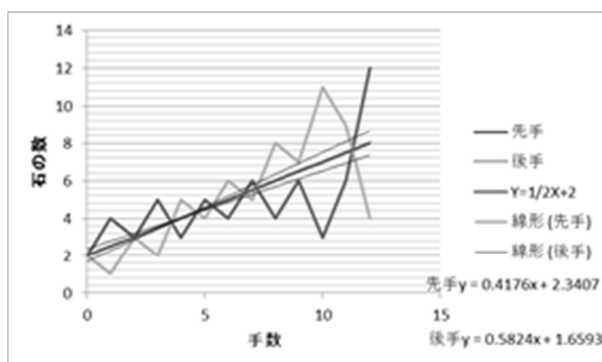
方法

各手順での盤上にある先手後手の石の数をグラフにし、近似直線を求める。

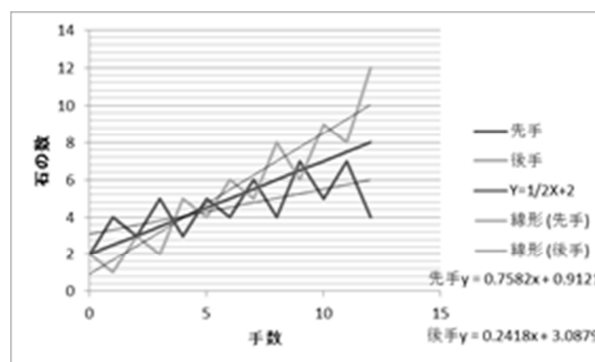
先手が勝つ場合と後手が勝つ場合のグラフを比較し、特徴を調べる。

結果

・先手が勝つ場合



・後手が勝つ場合



考察

(1) 近似曲線の性質

先手、後手の近似曲線をそれぞれ、 $Y_1' = a_1X + b_1$ 、 $Y_2' = a_2X + b_2$ (a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 は定数)とおく。

このとき、 $a_1 + a_2 = 1$ 、 $b_1 + b_2 = 4$ が成り立つ。

ここで、 X 手目における石の総数 $Y = Y_1 + Y_2$ であるから、

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 \\ &= (a_1X + b_1) + (a_2X + b_2) \\ &= (a_1 + a_2)X + (b_1 + b_2) \\ &= X + 4 \end{aligned}$$

ここで、盤上の石の総数は、手順が一つ増えるたびに1ずつ増える。また、ゲームの開始時点で盤上には石が4つある。したがって、 X 手目における石の総数は $Y = X + 4$ と表すこともできる。ゆえに、近似曲線の係数の和は石の増加分、切片の和は初期配置時点での石の総数を表す。

(2) グラフの交点、接点の性質

2つのグラフの交点、接点は常に $Y=1/2X+2$ 上に存在する。

2つのグラフの近似曲線について、

$Y=X+4$ より、 $Y_1+Y_2=2(1/2X+2)$ であるから、

$Y_1 \geq Y_2$ のとき、

$$Y_1 - (1/2X+2) = (1/2X+2) - Y_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$Y_1 < Y_2$ のとき、

$$(1/2X+2) - Y_1 = Y_2 - (1/2X+2) \quad \dots \textcircled{2}$$

①、②より、

$$|Y_1 - (1/2X+2)| = |Y_2 - (1/2X+2)|$$

したがって、2つの近似曲線は $Y=1/2X+2$ を軸として線対称である。

ゆえに、2つのグラフの交点、接点は常に $Y=1/2X+2$ 上に存在する。

(3) 交点、接点の個数と勝敗の関係

先手が勝つとき、先手のグラフと後手のグラフは偶数回交わる。

後手が勝つとき、先手のグラフと後手のグラフは奇数回交わる。

ただし、グラフが接する回数には関係しない。

初期配置では先手、後手それぞれの石の数は等しい。1手目で先手が石を置くとその置く場所にかかわらず、先手の石の数は4、後手の石の数は1になる。以降、先手の石の数、後手の石の数ともに増減を繰り返す。したがって、グラフが交わる点において、先手の石の数と後手の石の数が逆転する。初めは先手が優勢になるから、後手の場合、最低一回は優勢にならないと逆転できない。同様に考えていくと、後手が勝つときは先手のグラフと後手グラフは奇数回交わり、先手が勝つときは先手のグラフと後手のグラフは偶数回交わるという性質が導ける。

一方、先手のグラフと後手のグラフが接するときは、先手と後手の勢力が釣り合っているが、どちらかが優勢になったわけではないため、何回接しても勝敗には関係ない。

円筒形オセロは平面オセロを発展させたゲームであるため、平面オセロと異なった性質は、グラフからは見つけられなかった。また、(3)の性質については、あくまで結果からの考察であるため、ゲーム中に先手後手どちらが有利であるか判定するのは難しいと思われる。

今後の課題

- ・4×4からマス目を拡張した場合にも、後手が有利となるかを調べる。

マス目が増えると場合の数が膨大な量となり、実際に盤上で石を動かして確認することが難しくなる。そこで、プログラムを作成するなどして、効率的に数え上げられるようにする。

- ・グラフ以外にも、オセロゲームの進行に関わる数学的性質がないかを調べる。特に、円筒形オセロ独特の性質がないかを調べる。

参考文献

村上 健 「強くなるオセロ」 ナツメ社

平成 26 年度指定スーパーサイエンスハイスクール

千葉県立船橋高等学校



平成 29 年度（2017 年度）

生徒研究報告集

発行日 平成 29 年 9 月 30 日

発行者 千葉県立船橋高等学校

273-0002 千葉県船橋市東船橋 6-1-1

Tel : 047-422-2188 Fax : 047-426-0422