円筒形オセロにおける優位性と数学的性質

The Superiority Based on Order and the Nature of Cylindrical Othello Games

千葉県立船橋高等学校普通科 3 年
鈴木 さら

はじめに

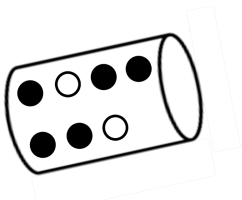
オセロは身近なゲームであり、ルールが単純でありながら、奥の深いゲームである。私自身も小さいころから親しんできた。盤面を平面から円筒形にしたら、石を置くことのできるマスが増えるので、より複雑で、ゲームの展開が予測しにくくなるのではないかと考えた。通常の平面オセロにおいては、4×4、6×6 の場合について、既に後手が優位であると示されている。そこで、盤面が円筒形になった場合のゲームの優位性についても調べてみたいと思った。

また、ゲームの勝敗と盤上の石の数の変化には、何か性質があるのではないのかと考え、調べた。

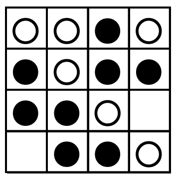
・円筒形盤の作成

4×4 オセロの両端をつなげ、円筒形にする。（図Ⅰ）

なお、盤全体の様子は観察しやすくするために 4×4 の展開図で表し、上端と下端がつながっている



図Ⅰ



図Ⅱ

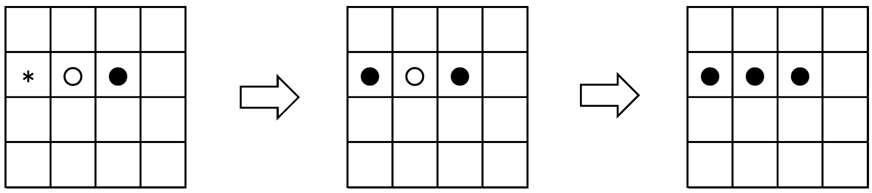
るとした。（図Ⅱ）

・ルール

基本的に平面オセロと同じ。表裏に異なる色を塗った石を使用する。

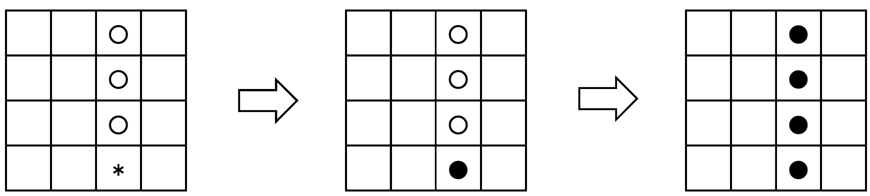
自分の石同士で相手の石を挟むことができるマスに石を置く。

挟んだ石を裏返す。



＊黒が置けるマス

下の図のような場合でも、黒は石を置けるとする。（＊黒が置けるマス）



この場合、実際には２つの石で相手の石を挟んでいないので、オセロのルールに適合しているとは

いえないという意見もあるが、今回はこのルールを採用することにした。

1. 先手後手によるゲームの優位性

仮定

最後の一手で逆転することが多いため、後手が有利である。

方法

先手は、置くことのできる全てのマスについて、後手は、最善と思われるマスに置いたとき、それぞれ場合分けをしてゲームを進展させていき、最終的なゲームの勝者が後手となるかを調べる。

後手の置く場所については、特に有利なマスがない場合、置くことが可能なマスのうち明らかに不利と思われるマスを除いて調べる。

ただし、回転または反転させたときに一致する場合については、省略した。マスの有利不利の判断には、以下に示す偶数理論を使用した。

偶数理論

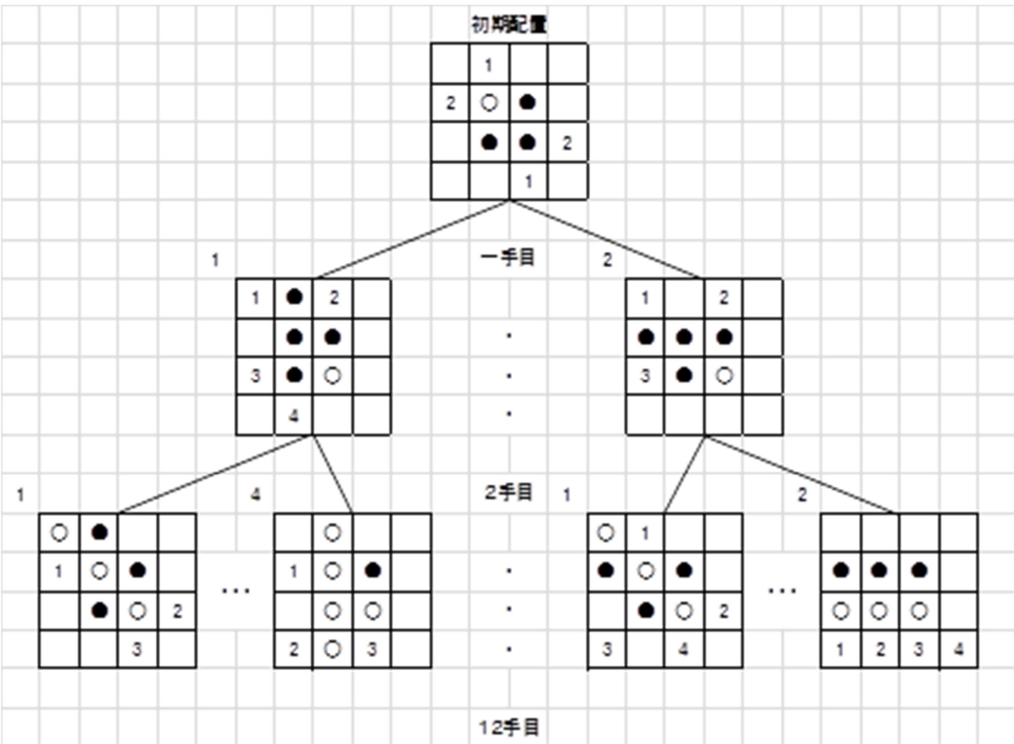
偶数空きに先着するのは悪手、奇数空きに先着するのは好手という考え方。

・不利な場所　両端の列において、まだマスが埋まっていないか、２マスが既に埋まっている場合。

・有利な場所　両端の列において、１または３マスが既に埋まっている場合。

ただし、４×４の円筒形オセロにおいては、一手目で端のマスに置くこともできるため、両端の列が２マスまたは３マス埋まっているときについてのみ偶数理論を適用することとした。

結果



考察

一手目で先手が１のマスを選び、二手目で後手が 2 または 3 を選んだ場合、また、一手目で先手が２のマスを選び、二手目で後手が 1 または 3 を選んだ場合、必ずしも後手が勝つとは言えない。
したがって、この場合は後手有利であるとは言えない。

一方、一手目で先手が１のマスを選び、二手目で後手が 1 または 4 を選んだ場合、または、一手目で先手が２のマスを選び、二手目で後手が 2 を選んだ場合は、必ず後手が勝つ。
したがって、この場合は後手有利であると言える。

同様のことが、後手の手順の選択肢のマスそれぞれについて言える。

結論

後手が、それぞれの手順で適当なマスを選ぶことができれば、後手有利であるといえる。

2. ゲームの進展における数学的性質

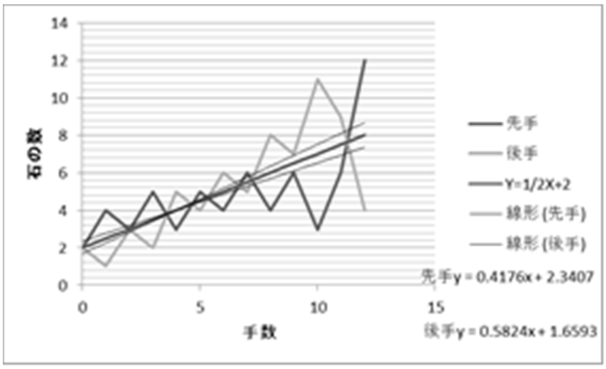
方法

各手順での盤上にある先手後手の石の数をグラフにし、近似直線を求める。

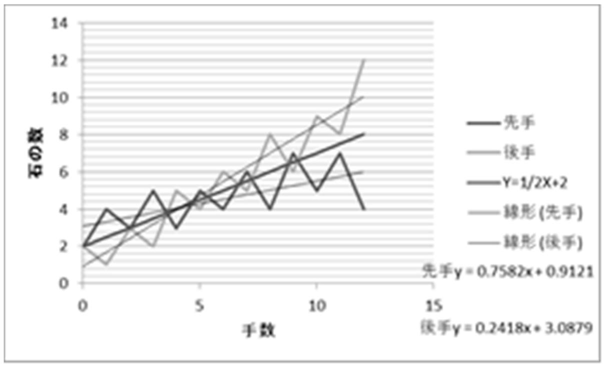
先手が勝つ場合と後手が勝つ場合のグラフを比較し、特徴を調べる。

結果

・先手が勝つ場合



・後手が勝つ場合



考察

(1)近似曲線の性質

先手、後手の近似曲線をそれぞれ、$Y_1'=a_1X+b_1$、$Y_2'=a_2X+b_2$（a_1、a_2、b_1、b_2は定数)とおく。

このとき、$a_1+a_2=1, b_1+b_2=4$ が成り立つ。

ここで、X 手目における石の総数 $Y=Y_1+Y_2$ であるから、

$$
\begin{aligned}
Y&=Y_1+Y_2\\
&=(a_1X+b_1)+(a_1X+b_1)\\
&=(a_1+a_2)X+(b_1+b_2)\\
&=X+4
\end{aligned}
$$

ここで、盤上の石の総数は、手順が一つ増えるたびに１ずつ増える。また、ゲームの開始時点で盤上には石が 4 つある。したがって、X 手目における石の総数は Y=X+4 と表すこともできる。
ゆえに、近似曲線の係数の和は石の増加分、切片の和は初期配置時点での石の総数を表す。

(2) グラフの交点、接点の性質

2 つのグラフの交点、接点は常に Y=1／2X+2 上に存在する。

2 つのグラフの近似曲線について、

Y=X+4 より、$Y_1+Y_2=2(1/2X+2)$ であるから、

$Y_1 \geqq Y_2$ のとき、

$$Y_1-(1/2X+2)=(1/2X+2)-Y \quad \cdots ①$$

$Y_1<Y_2$ のとき、

$$(1/2X+2)-Y_1=Y_2-(1/2X+2) \quad \cdots ②$$

①、②より、

$$|Y_1-(1/2X+2)|=|Y_2-(1/2X+2)|$$

したがって、 2 つの近似曲線は Y=1/2X+2 を軸として線対称である。

ゆえに、2 つのグラフの交点、接点は常に Y=1/2X+2 上に存在する。

(3) 交点、接点の個数と勝敗の関係

先手が勝つとき、先手のグラフと後手のグラフは偶数回交わる。

後手が勝つとき、先手のグラフと後手のグラフは奇数回交わる。

ただし、グラフが接する回数には関係しない。

初期配置では先手、後手それぞれの石の数は等しい。1 手目で先手が石を置くとその置く場所にかかわらず、先手の石の数は 4、後手の石の数は 1 になる。以降、先手の石の数、後手の石の数ともに増減を繰り返す。したがって、グラフが交わる点において、先手の石の数と後手の石の数が逆転する。初めは先手が優勢になるから、後手の場合、最低一回は優勢にならないと逆転できない。同様に考えていくと、後手が勝つときは先手のグラフと後手グラフは奇数回交わり、先手が勝つときは先手のグラフと後手のグラフは偶数回交わるという性質が導ける。

一方、先手のグラフと後手のグラフが接するときは、先手と後手の勢力が釣り合っているが、どちらかが優勢になったわけではないため、何回接しても勝敗には関係ない。

円筒形オセロは平面オセロを発展させたゲームであるため、平面オセロと異なった性質は、グラフからは見つけらなかった。また、(3) の性質については、あくまで結果からの考察であるため、ゲーム中に先手後手どちらが有利であるか判定するのは難しいと思われる。

今後の課題

・4×4 からマス目を拡張した場合にも、後手が有利となるかを調べる。
　マス目が増えると場合の数が膨大な量となり、実際に盤上で石を動かして確認することが難しくなる。そこで、プログラムを作成するなどして、効率的に数え上げられるようにする。

・グラフ以外にも、オセロゲームの進行に関わる数学的性質がないかを調べる。特に、円筒形オセロ独特の性質がないかを調べる。

参考文献

村上 健　「強くなるオセロ」ナツメ社