

四次元ルービックキューブで解の最小手数を求めるアルゴリズム

The algorithm to get minimum number of steps for solving of 4-dimensional Rubik's Cube

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

長谷川 世波

はじめに

元々は自分の趣味として存在していたルービックキューブだが、数学の、主に群論の分野に深い関わりがあると知り、今回の研究の発端となった。しかし、通常のルービックキューブは既に研究がされ尽くされていたため、インターネット上に存在していた四次元のルービックキューブを研究しようという考えに至った。今回使用したキューブモデルも、それを引用したものである。

目的

ルービックキューブを四次元に拡張し、存在し得る全ての配置から、解を得るまでの手数の下限値を求める。

そこで、三次元で下限値に近い値を出せる、シスルスウェイト法を四次元に適用しようと試みた。

1. シスルスウェイト法とは

ルービックキューブの各単位操作をそれぞれ U D L R F B とし、段階ごとに場合分けをする。（それぞれ上、下、左、右、前、後の列を時計回りに 90° 回転させる操作を表す。これをシングマスター記法と言う。）すると、ルービックキューブの状態を、以下の段階に分類することができる。

$$G1 = \langle R, L, F, B, U^2, D^2 \rangle$$

$$G2 = \langle R, L, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle$$

$$G3 = \langle R^2, L^2, F^2, B^2, U^2, D^2 \rangle$$

$$G4 = \langle 1 \rangle$$

$\langle \rangle$ 内はその段階において可能な操作を表し、2乗された記号は、その記号が示す操作を2回続けて行うことに等しい。例えば U^2 なら、上の列を 180° 回転させることを意味する。

また、 $G4$ における 1 は完成形を表し、この状態が目標とする最終段階となる。

$G4$ を除く上記3つのグループはそれぞれ、

$$R \cdot L \cdot F = (R \cdot L) \cdot F = R \cdot (L \cdot F) \quad (\text{結合律})$$

$$R^4 = L^4 = F^4 = B^4 = U^4 = D^4 = I \quad (\text{単位元})$$

$$R^{-1} \cdot R = I \quad (\text{逆元})$$

というように群公理を満たしているため、群であるといえる。

初期の状態を $G0$ とすると、

$$G_0 = \langle R, L, F, B, U, D \rangle$$

$$G_4 \subset G_3 \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0$$

となり、それぞれ前段階の部分群である。完成に至るまでの手順としては、 G_0 から G_1 、 G_2 、 G_3 と段階を経て、完成形である G_4 まで持っていく。 G_0 から G_1 までは7手、 G_1 から G_2 までは13手、 G_2 から G_3 までは15手、 G_3 から G_4 までは17手あれば解けると知られている。よって、 $7 + 13 + 15 + 17 = 52$ 手が、この方法でだせる三次元の下限值にもっとも近い値である。（現在はコンピュータによって20手あれば解けるとされている。）

考察

1. シスルスウェイト法に対する考察

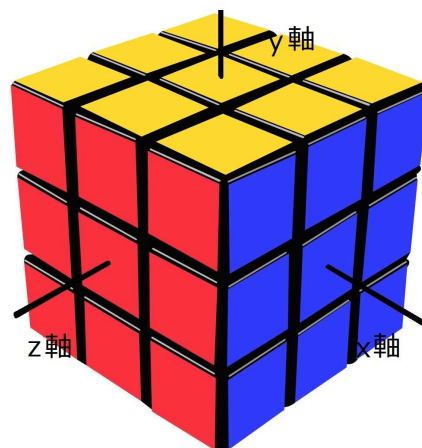
シスルスウェイト法が、どのような思考を基にしたアルゴリズムなのかを考える。

まず、右図のように x 軸、 y 軸、 z 軸をとる。

このとき、中心を貫通している軸が x 軸、 y 軸、 z 軸の面をそれぞれ、 x 軸所有の面、 y 軸所有の面、 z 軸所有の面と呼ぶことにする。

すると、 U と D は x 軸所有面と y 軸所有面の置換であり、 F と B は z 軸所有面と x 軸所有面、 R と L は y 軸所有面と z 軸所有面の置換であると言い換えることができる。

この3種類の置換のうち、二面体を反転させるには3つの置換が、三面体をひねるには2つの置換が必要である。シスルスウェイト法は、 90° 回転からなる置換群を 180° 回転からなる準同型写像にすることで、これら3種類の置換を順に制限し、三面体、二面体を段階的に揃えていくことで完成形に持っていくアルゴリズムであると考えられる。

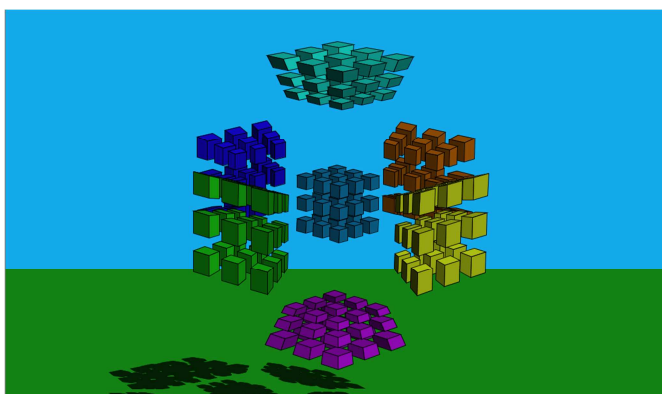


(加工元: Free Download Web)

2. 四次元ルービックキューブの導入

三次元のキューブの全体像は立方体だったのに対し、四次元の全体像は正八胞体を表す。したがって、三次元の単位操作が正方形の回転だったのに対し、四次元の単位操作は立方体の回転を表す。このとき、任意の立方体を回転させると、その立方体に接している面も回転する。

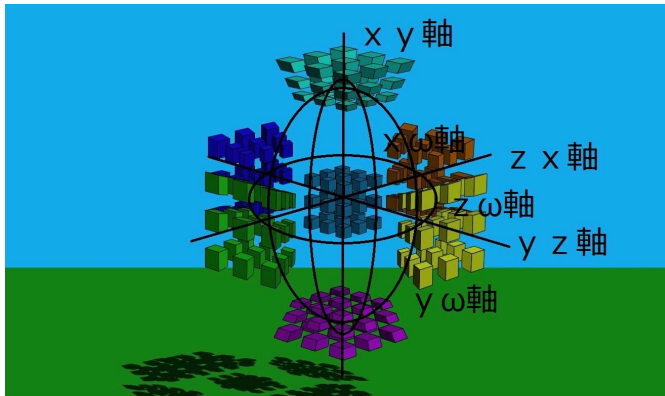
なお、小さいキューブを小キューブ、小キューブが集まって形成されている立方体は大



キューブと便宜的に呼ぶことにする。また、成している小キューブの数に合わせて、各ユニットを一、二、三、四胞体と定義し、中央と外側の大キューブを ω 軸所有の胞、右と左の大キューブを x 軸所有の胞、前と後ろの大キューブを y 軸所有の胞、上と下の大キューブを z 軸所有の胞とする。（四次元において直交する座標軸は4本ある。）

3. 四次元への応用

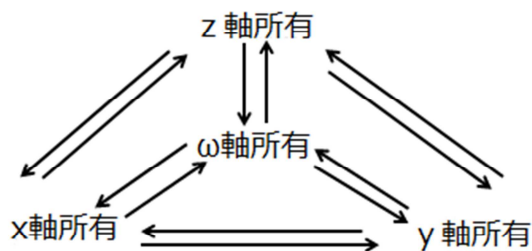
単位操作を記号化するため、以下のように6つの回転軸をとる。



黄色の大キューブを右、青緑の大キューブを上部に固定し、右の大キューブを $y z$ 軸中心に回転させた場合を $R y z$ 、 $z \omega$ 軸中心に回転させた場合を $R z \omega$ というように、大キューブの位置と回転軸の2つの記号を用いて単位操作を表すと

$H O = \langle C x y, C y z, C z x, O x y, O y z, O z y, R y z, R y \omega, R z \omega, L y z, L y \omega, L z \omega, F z x, F x \omega, F z \omega, B z x, B x \omega, B z \omega, U x y, U x \omega, U y \omega, D x y, D x \omega, D y \omega \rangle$

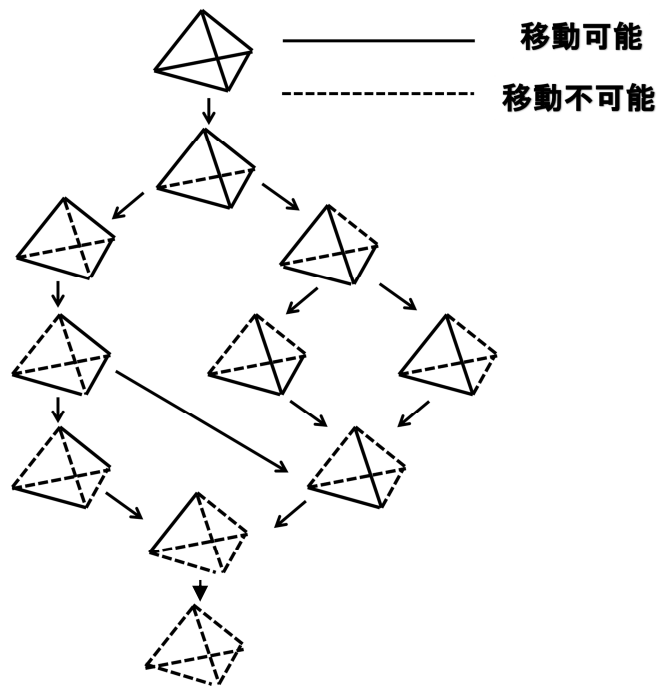
所有軸間の小キューブの移動を表すと、以下のような図になる。



これは立体モデルだと四面体となる。

シスルスウェイト法を応用するために、二胎体、三胎体、四胎体にも反転、捻りの概念がないかを調べる。小キューブは一色のみなので、単純にそれ自身の色によつての識別は不可能だとわかる。

そこで、接している小キューブの色による識別を試みた。四次元ルービックキューブの性質上、単位操作はすべて大キューブと、それに接している面の回転によるものだから、各多胞体を構成している小キューブ同士は常に接していることがわかる。したがって、この対応する小キューブ同士の配置から、各多胞体の向きを識別可能にした。これらもまた、各所有軸間の移動によって向きが変わるので、四面体の図で段階ごとに場合分けをすると下図のようなフローチャートで表せる。



結論

小キューブの位置関係によって、反転、捻りの概念を定義することができた。また、6本の回転軸と4本の座標軸を定義づけ、所有軸間の移動に着目することでシスルスウェイト法を応用した四次元のアルゴリズムを生成できた。

今後の課題

三次元のアルゴリズムを四次元に応用するところまでは成功したので、プログラミングを学ぶなどして、下限値を出したい。

また、多胞体が反転する条件、ひねられる条件から、最も理に適ったアルゴリズムを生み出したい。

参考文献

I. グロスマン, W. マグナス著 (浅野啓三訳) 『群とグラフ』

David Joyner 著 (川辺治之訳) 『群論の味わい ～置換群で解き明かすルービックキューブと15パズル～』

「Magic Cube 4D」 (<http://superliminal.com/cube/cube.htm>)