

循環小数における循環節の規則性

Rules of repetend in recurring decimals

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

伊達 まどか

目的

コンピューターのプログラミングに使われるアルゴリズムに循環小数が使われているのを知り興味を持った。そのため循環節の桁数の規則性について調べた。

考察

x を素数としたときの $1/x$ を考える。

$1/x$	値	桁数
$1/3$	$0.\dot{3}$	1
$1/7$	$0.14285\dot{7}$	6
$1/11$	$0.\dot{0}9$	2
$1/13$	$0.\dot{0}7692\dot{3}$	6
$1/17$	$0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$	16
$1/19$	$0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$	18
$1/23$	$0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$	22
$1/31$	$0.\dot{0}32258064516129\dot{9}$	15
$1/37$	$0.\dot{0}27$	3
$1/41$	$0.\dot{0}2439$	5

1. 桁数が偶数の場合

循環節の桁数が偶数の場合、その数を二つに分けて足すと全ての桁の数が 9 になる。

たとえば、 $1/7$ の循環節は 1 4 2 8 5 7 で

$$142 + 857 = 999$$

である。

実際、

$$\begin{array}{r} 10^6/7 = 142857.142857\cdots \\ -) \quad 1/7 = 0.142857\cdots \\ \hline (10^6 - 1)/7 = 142857 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10^3/7 = 142.857142\cdots \\ -) \quad 1/7 = 0.142857\cdots \\ \hline (10^3 - 1)/7 = 142.714285\cdots \end{array}$$

上の結果から、

$$(10^3 + 1)(10^3 - 1) = 7 \times 142857$$

また、 $(10^3 - 1)/7 = 142.7142\cdots$ なので、 $10^3 - 1$ は7の倍数ではない。

よって、 $10^3 + 1$ が7の倍数である。

計算すると、

$$\begin{array}{r} 10^3/7 = 142.857142\cdots \\ +) \quad 1/7 = 0.142857\cdots \\ \hline (10^3 + 1)/7 = 142.999999\cdots \\ = 142 + 0.\dot{9} \\ = 143 \end{array}$$

よって、小数の部分に9が循環する。

2. 桁数が奇数の場合

次に桁数が奇数の場合について考察した。

$1/37$ の循環節は027で、桁数は3である。

$$\begin{array}{r} 10^3/37 = 27.027027\cdots \\ -) \quad 1/37 = 0.027027\cdots \\ \hline (10^3 - 1)/37 = 27 \\ 10^3 - 1 = (10 - 1)(10^2 + 10 + 1) = 27 \times 37 \end{array}$$

よって、 $10^2 + 10 + 1$ は37の倍数である。

$(10^2 + 10 + 1)/37$ を計算すると

$$\begin{array}{r} 10^2/37 = 2.70270\cdots \\ 10/37 = 0.27027\cdots \\ +) \quad 1/37 = 0.02702\cdots \\ \hline (10^2 + 10 + 1)/37 = 2.99999\cdots \\ = 2 + 0.\dot{9} \\ = 3 \end{array}$$

値は整数3になる。

3. 一般化

今までの式を文字に置き換えて考えた。

循環節の桁数が偶数の場合

$1/X$ の循環節の桁数を $2N$ 、循環節の数字を C とすると

$$C = (10^{2N} - 1)/X$$

よって、 $(10^N + 1)(10^N - 1) = CX$

例1、例2より $10^N - 1$ は X の倍数ではないので、 $10^N + 1$ が X の倍数である。

循環節の桁数が奇数の場合

$1/X$ の循環節の桁数を $2N+1$ 、循環節の数字を C とすると

$$C = (10^{2N+1} - 1) = (10 - 1)(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2N})/X$$

$$CX = (10 - 1) \sum_{k=1}^{2N+1} 10^{k-1}$$

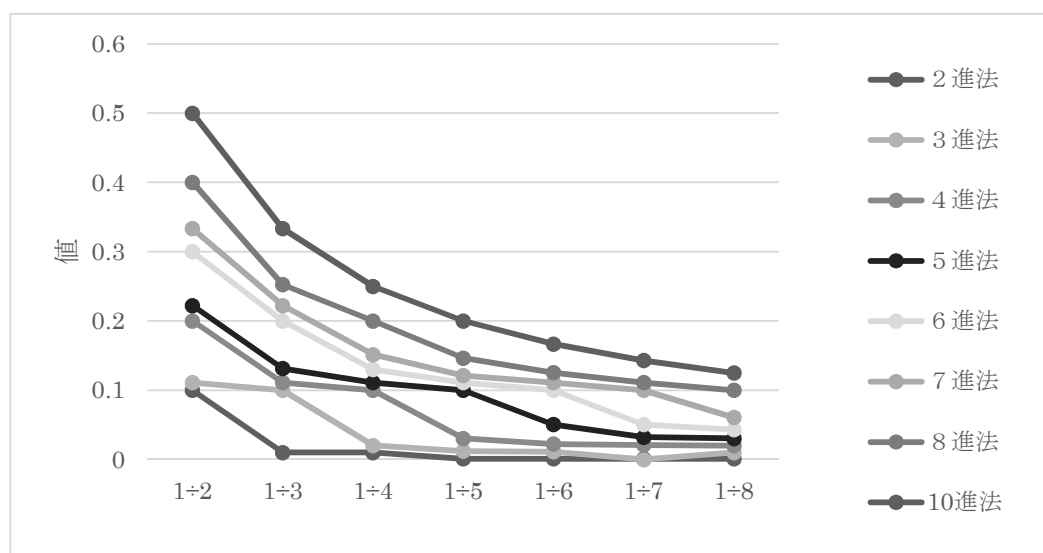
よって、 $\sum_{k=1}^{2N+1} 10^{k-1}$ は X の倍数になる。

n 進数の循環節

n 進法で表した循環節を表に示す。

10 進法	2 進法	3 進法	4 進法	5 進法
1/2	0.1	0.1̄	0.2	0.2̄
1/3	0.01̄	0.1	0.1̄	0.13̄
1/4	0.01	0.02̄	0.1	0.1̄
1/5	0.000111̄	0.012̄	0.03̄	0.1
1/6	0.001̄	0.01̄	0.02̄	0.05̄
1/7	0.001̄	0.010212̄	0.02̄	0.032̄
1/8	0.001	0.01̄	0.02	0.03̄

10 進法	6 進法	7 進法	8 進法
1/2	0.3	0.3̄	0.4
1/3	0.2	0.2̄	0.25̄
1/4	0.13	0.15̄	0.2
1/5	0.1̄	0.12̄	0.1463̄
1/6	0.1	0.1̄	0.125̄
1/7	0.05̄	0.1	0.1̄
1/8	0.043	0.06̄	0.1



n 進法するとき、10進法で $1/(n-1)$ の値は $0.\dot{1}$
表を斜めで見ると 1.2.3...のような規則性が見える。

今後の課題

上の式を二つの文字で表したい。
他にも何か規則性があるか探してみたい。
循環節の桁数の最大値の変化に規則性があるか調べたい。
 n 進数でのグラフから新たに新しい規則性を見つけたい。

反省・感想

計算に多くの時間がかかってしまい、証明したかった規則性を考える時間が少なくなってしまった。

しかし、10進法での循環節の規則性の証明が分かったので良かった。また自分がやりたかった身近な分野を扱えて満足する研究となった。