千葉県立船橋高等学校
理数科課題研究2017年

三次元数独の作成とその数学的性質

The Creation of a 3-dimensional Sudoku and Its mathematical Properties

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年　佐藤 翔太

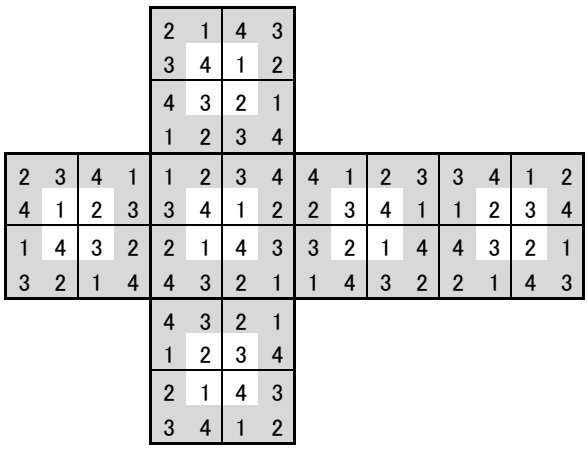
＜研究目的＞

立方体の表面に 4×4 数独にした「4×4 三次元数独」を考え、それに関する様々な性質について調べることを目指した。また、四次元数独への発展について考察を試みた。

＜4×4 三次元数独のルール＞

・立方体の各面に 4×4 の数独を作る

・立方体の辺を共有するマスには同じ数字が入る(下図灰色部分)



＜考察と結果１＞　配置の総数を求める

①　向きを固定して配置した場合

立方体を転がしたときに一致するものは考えない。

まず ABCD を左上のブロックに固定したときの 4×4 数独の並べ方を表す。ABCD はそれぞれ重ならない 1~4 の数字を表す。このとき 12 個の配置のパターンがある。

a1

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

a2

A	B	C	D
C	D	A	B
B	C	D	A
D	A	B	C

a3

A	B	C	D
C	D	A	B
D	A	B	C
B	C	D	A

a4

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

b1

A	B	C	D
C	D	B	A
B	A	D	C
D	C	A	B

b4

A	B	C	D
C	D	B	A
D	C	A	B
B	A	D	C

c1

A	B	D	C
C	D	A	B
B	A	C	D
D	C	B	A

c4

A	B	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	C	D

d1

A	B	D	C
C	D	B	A
B	A	C	D
D	C	A	B

d2

A	B	D	C
C	D	B	A
B	C	A	D
D	A	C	B

d3

A	B	D	C
C	D	B	A
D	A	C	B
B	C	A	D

d4

A	B	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B
B	A	C	D

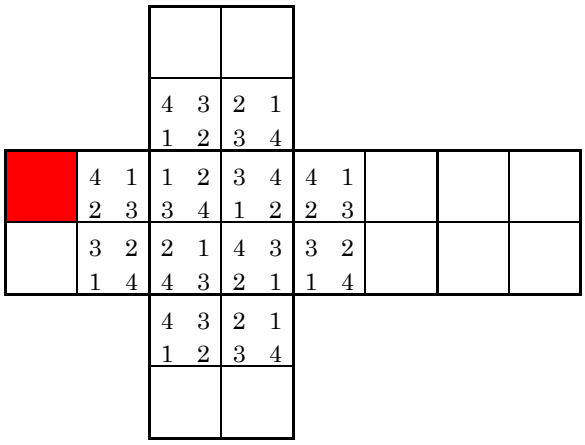
ここで表した 12 個のパターンを立方体の上面に入れる。(この段階で立方体の上半分までの範囲の数字の位置が定まる)

そこからそれぞれのパターンで次ページ図の赤色部分に数字を入れたときに数独を何通り作ることができるかを調べる。(この段階で全てのマスに数字が入る)

この結果　a1,a4,d1,d4 の場合では 4 通りずつ

a2,a3,b1,b4,c1,c4,d2,d3 の場合では 2 通りずつの

合計 32 通りの並べ方があり、総数は **32×4!=768 通り**となった。



②立方体の向きを固定せずに考える場合

面の向きを固定せずに考えると 6 種類の並べ方がある

向きを変えたときに並べ方が同じになるもの(a1 は点対称の図形である)

a1 { a1 , a1 , a1 , a1 }　*a2* { a2 , c1 , a2 , c1 }

a3 { a3 , b1 , a3 , b1 }　*a4* { a4 , d1 , a4 , d1 }

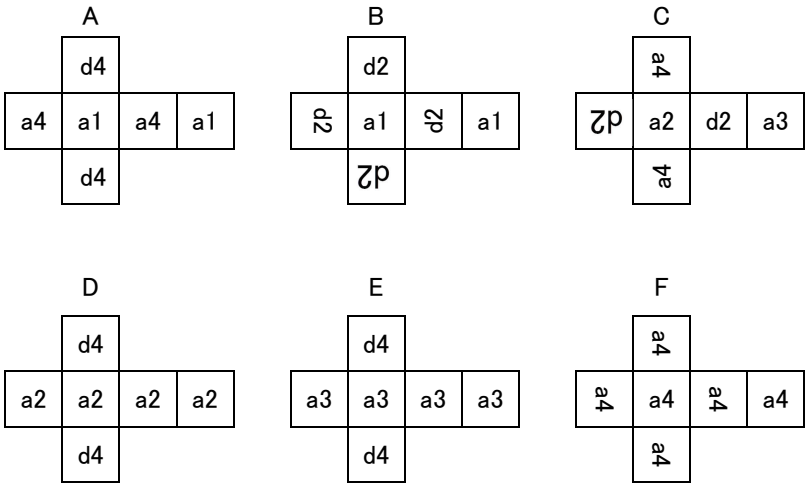
d2 { d2 , c4 , d3 , b4 }　*d4* { d4 , d4 , d4 , d4 }

文字の向きが変わっているものは 1 ページの図の文字で表したパターンをその向きに回転させたものである。

①で見つけた 32 通りの並べ方の中で回転させると同じになるものをまとめていく。

最終的に残ったものを *a1,a2,a3,a4,d2,d4* だけで表し、それぞれのパターンで立方体を転がしても一致しないものが何通りあるかを調べる。

各面の 4×4 数独の組合せは次の 6 タイプとなった。



この結果　A の組合せ 12 通り、B の組合せ 12 通り、C の組合せ 12 通り、D の組合せ 3 通り、
E の組合せ 3 通り、F の組合せ 2 通りの合計 **44 通り**となった。

③展開図を表に折ったときと裏に折ったときを 1 通りとまとめる場合

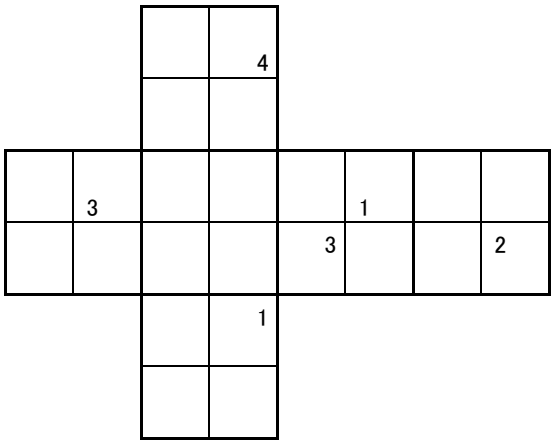
②で見つけた 44 通りの中から、裏返すと同じになる組み合わせやどちらに折っても全く同じになるものを見つける。

・A,B,C ではそれぞれ半分の数になる
・D を裏返すと E と同じになる
・F ではどちらに折っても全く同じになる
この結果合計 **23 通り**となった。

＜考察と結果２＞　１通りに決まるヒントの最小数を調べる

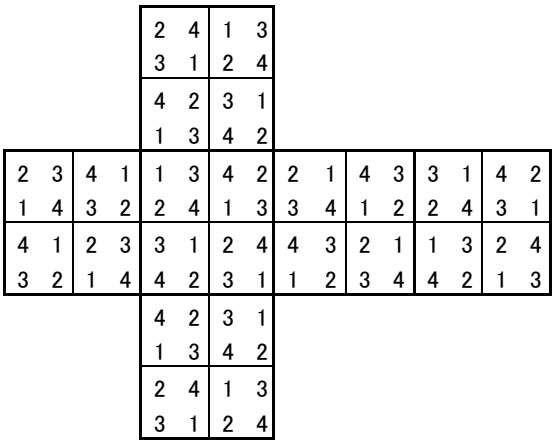
考察の結果 A,F パターンでは 6 個、B,C,D,E パターンでは 5 個入れたときに 1 通りに決まる最少の配置数となる。

ヒント数 6 個の例

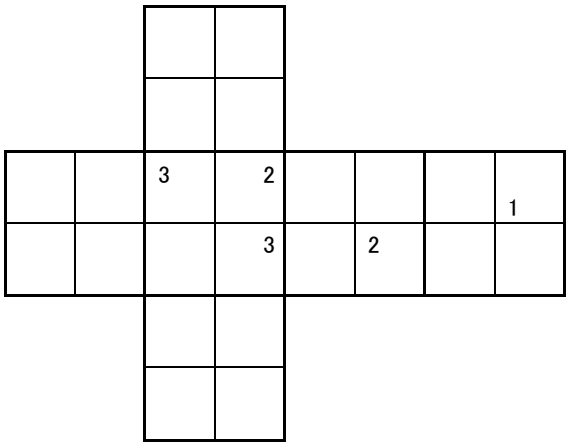


⇒

答え

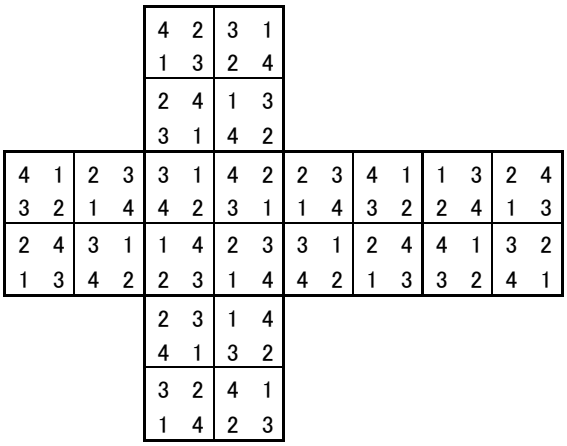


ヒント数 5 個の例



⇒

答え

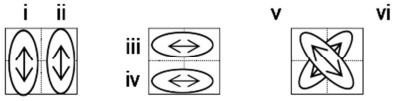


＜考察と結果３＞　数字を入れ替えたときの法則

配置の総数については 1－②の結果の 44 通りを採用し、A～F それぞれに 1234 の数字の入れ方に応じて A1～F2 までの通し番号を付けた。

初めに、ある 1 つの数独の中の 2 個の数字を入れ替えると、22 個または 46 個の数字が自動的に入れ替わることがわかった。

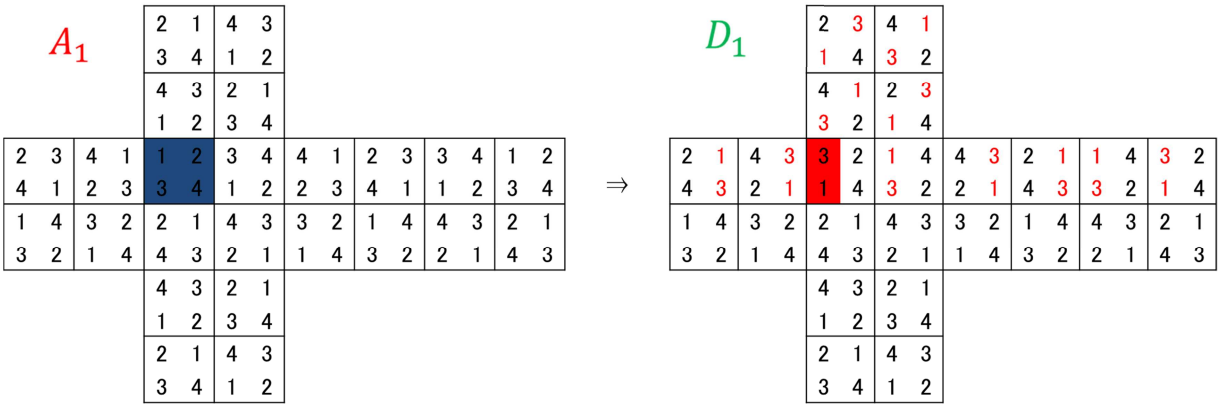
・入れ替え操作
（入れ替え操作は 1 つのブロックの中で行い、全部で 6 種類ある）



・入れ替えを行うブロック

入れ替えを行う面を数字で表し、(1 は上面、6 は下面)

入れ替えを行うブロックの位置をα β γ δ (左上から反時計回りの順番) で表した。



上図

左の数独の 1α(青色部分)で i の操作(1 と 3 の入れ替え操作)をすると 22 個の数字が入れ替わり、D_1となった。

この操作を A_1*1α i →D_1と表した。

A_1からの他の操作 (全て合計 24 個の数字が入れ替わる)

A_1 *1α ii →E_1 , A_1 * 1α iii →C_5 ,A_1 *1α iv →C_{12} ,A_1 *1α v →B_{12} ,A_1 *1α vi →B_9

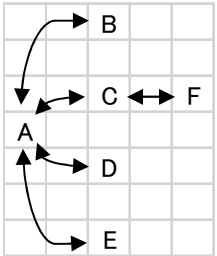
A_1 * 1β i →D_1 ,A_1 * 1β ii →E_1 , A_1 * 1γ iii →C_{12} , A_1 * 1γ iv →C_5

A_1 * 6α v →B_{12} ,A_1 * 6α vi →B_1

結果 A はこれらの操作で B,C,D,E となる。

また、数字の入れ替えと A～F の関係について右の図の法則があるとわかった。

(B,C,D,E には入れ替えても並び方が変化しない場合がある)



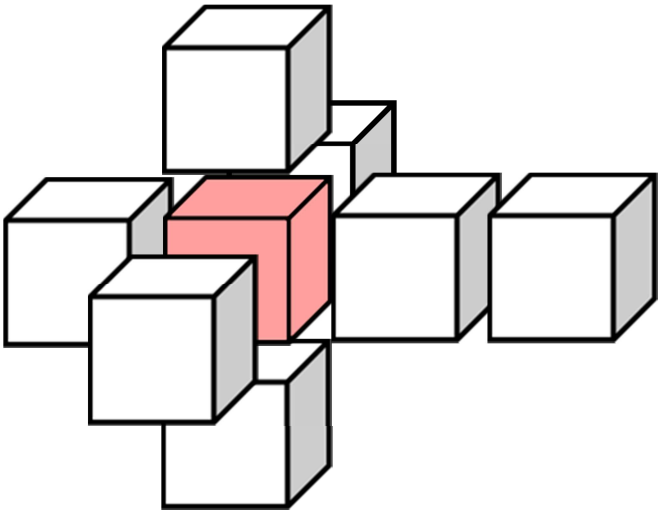
数字の入れ替えによる数独の変化

	*6 α v	*6 α vi	*1 γ iii	*1 γ iv	*1 β i	*1 β ii
A1	B12	B1	C12	C5	E1	D1
A2	B11	B2	C12	C3	E2	D2
A3	B9	B3	C9	C6	E3	D3
A4	B8	B4	C9	C1	E2	D2
A5	B7	B5	C10	C4	E3	D3
A6	B10	B6	C10	C2	E1	D1
A7	B7	B5	C11	C5	E2	D2
A8	B9	B3	C11	C3	E1	D1
A9	B4	B8	C4	C7	E1	D1
A10	B6	B10	C6	C8	E2	D2
A11	B12	B1	C8	C1	E3	D3
A12	B2	B11	C2	C7	E3	D3

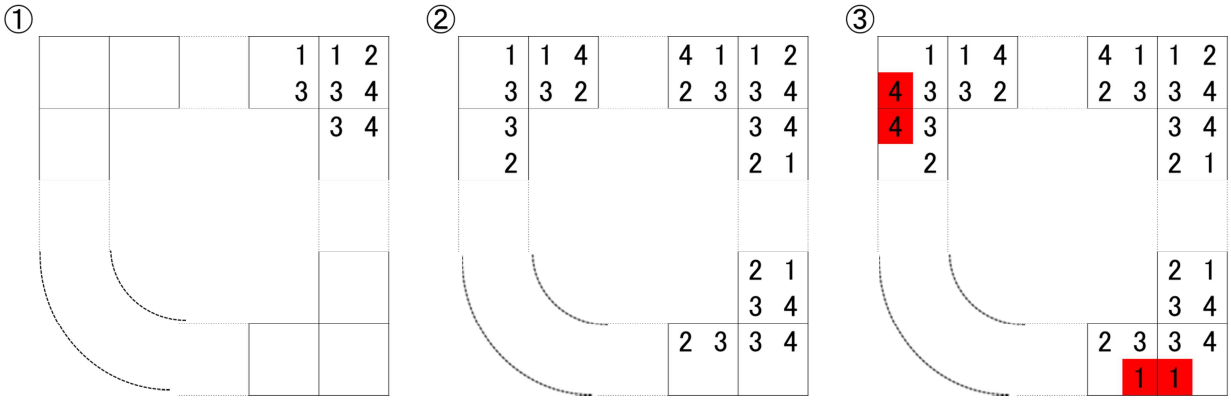
	*1 β i
C1	F1
C2	F2
C3	F2
C4	F1
C5	F1
C6	F2
C7	F2
C8	F1
C9	F2
C10	F1
C11	F1
C12	F2

＜考察と結果 4＞　四次元数独への考察

三次元数独を基にして四次元数独の作成を試みたが作成不可能であることがわかった。



・正八胞体の三次元展開図



四次元数独が作成不可能である理由

接続する 2×2×2 の立方体 3 つで考える。

①一つの立方体の一面に数字を入れる。

②そのまわりの他の面に数字が入る。

②　接続する 2 つの立方体に数字が写る。

④2 つの立方体に入る数字をそれぞれ入れると同じ数字が入るべき場所に違う数字が入ってしまう。
　(図の赤色部分)

＜今後の展望＞

数字を入れ替えたときの法則を 1－①の結果を採用したときについて調べる。