

## ハノイの塔の柱を $x$ 本にして最小手順を求める

Minimum Number of Moves Required to Solve the “Tower of Hanoi” with  $x$  Rods

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

坂口 慶多

### はじめに

通常ハノイの塔は柱が 3 本で、 $n$  枚の円盤を移動する最小手順の数を表す式は  $2^n - 1$  だと分かっている。しかし、柱が 4 本のときの最小手順の数を表す式は、コンピューターで調べた結果をもとにしたものならばネットに出ているが、規則性を論理的に導いたものは出ていない。そこで、一般に柱を  $x$  本、円盤を  $n$  枚としたときの最小手順の数の規則性を解明し、最小手順の数を表す式を求めることを目指した。

### ハノイの塔のルール

- ・ 1 回の手順で 1 枚の円盤を移動させる。
- ・ 円盤の上にはそれよりも大きい円盤を置くことはできない。
- ・ 円盤を柱以外の場所に置いてはいけない。

### 目的

- ① まずは、 $x = 4$  とした場合について考察する。
- ② ① の考察から柱が 4 本のときの最小手順の数を表す式を求める。
- ③  $x \geq 5$  の場合にも応用し、柱を  $x$  本、円盤を  $n$  枚としたときの最小手順の数を表す式を求める。

### 定理

柱を 3 本、円盤を  $n$  枚としたときの最小手順の数を  $III_n (= 2^n - 1)$ 、柱を 4 本にしたときの最小手順の数を  $IV_n$  のようにローマ数字を用いて表すと柱が 4 本のときの最小手順の数に関して次が成り立つ。

- ・  $n = 1 \sim 3$  では最小手順の数は  $2^1$  ずつ増える。
- ・  $n = 3 \sim 6$  では最小手順の数は  $2^2$  ずつ増える。
- ・  $n = 6 \sim 10$  では最小手順の数は  $2^3$  ずつ増える。
- ・  $\vdots$

- ・  $IV_3 = 2IV_1 + III_2$
- ・  $IV_6 = 2IV_3 + III_3$
- ・  $IV_{10} = 2IV_6 + III_4$
- ・  $\vdots$

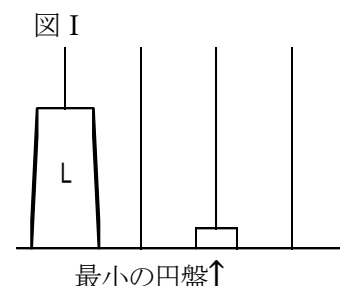
以下、このことの証明

### 考察

#### 1. $x = 4$ における分割による最小手順化

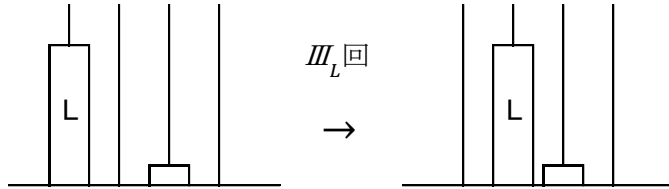
図 I のように最小の円盤を他の柱へ動かし、残りの円盤を  $L$  枚とする。

このときに、 $L$  枚の円盤全てを他の柱に動かす方法を考えて、以下のように、 $L$  枚を 2 つに分割する方法としない方法がある。



※3 つ以上に分割する場合は、先に上から 2 つの塊を動かし、その際に 3 つ目以降の塊は無視することができるので、上から 2 つの塊の合計枚数を  $L$  枚と置き換えることができる。  
 そのため、ここでは 2 つに分割する場合のみを考える。

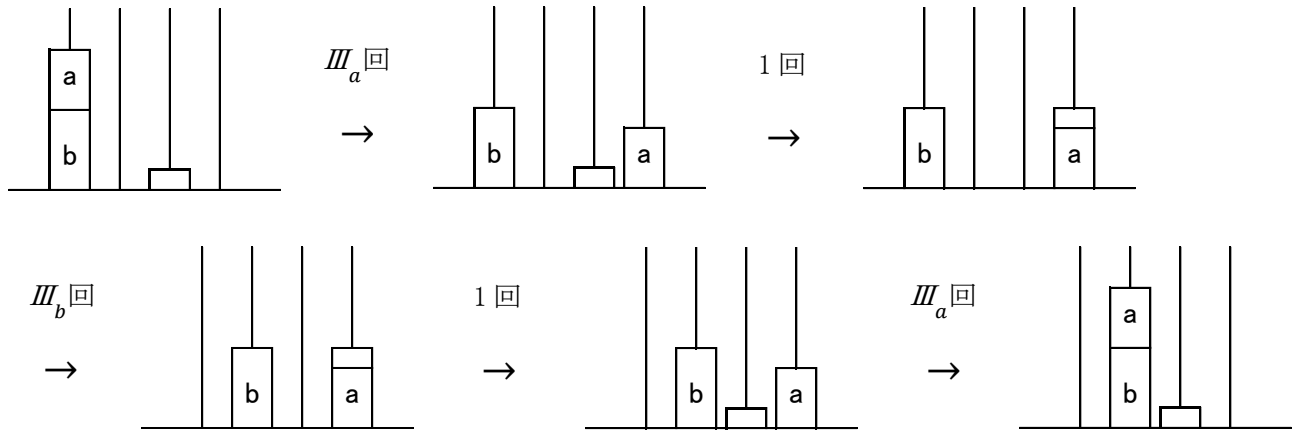
(i)  $L$  を分割しない場合



最小の円盤の上には何も置くことはできないので、1, 2, 4 本目の柱で、 $x = 3$  のときと同じように  $L$  枚を動かす。

この場合の手順数は  $III_L$  回。

(ii)  $L$  を 2 つに分割する場合 ※分割してできた 2 つの塊を仮に  $a$  枚と  $b$  枚とする。



$x = 3$  のときと同じように  $a$  枚と  $b$  枚を動かす。

この場合の手順数は、 $2 III_a + III_b + 2 = III_{a+1} + III_b + 1$  回。

また、 $III_{a+1} + III_b + 1 = 2^{a+1} + 2^b - 1$  より、 $2^{a+1} + 2^b$  の最小値を考えると、 $a + b + 1$  の値は一定なので、相加平均と相乗平均の不等式より、

$$2^{a+1} + 2^b \geq 2\sqrt{2^{a+1} \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b+1}} = 2\sqrt{2^{L+1}}$$

よって、等号成立は  $a + 1 = b$  のときなので、 **$a + 1$  と  $b$  をできるだけ近い値にすると手順数が最小となる。**

ここで、 $III_L$  と  $III_{a+1} + III_b + 1$  を比較すると、

表 I より、 $L = 3$  のとき、 $III_L = III_{a+1} + III_b + 1$

$L \geq 4$  のとき、 $III_L > III_{a+1} + III_b + 1$

よって、 $L = 3$  のときは分割しても手順数が変わらず、

$L \geq 4$  のときは分割する方が最小手順をとる。

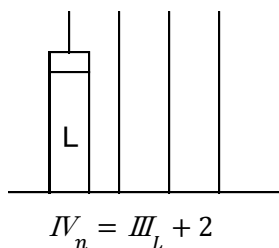
表 I

| L        | $III_L$  | $III_{a+1} + III_{b+1}$ |
|----------|----------|-------------------------|
| 2        | 3        | 5                       |
| 3        | 7        | 7                       |
| 4        | 15       | 11                      |
| 5        | 31       | 15                      |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$                |

## 2. $IV_n$ の求め方

以下のように分割してできた塊の数によって場合分けして考える。

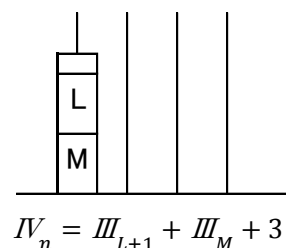
(i)



| n | $IV_n$ | L |
|---|--------|---|
| 2 | 3      | 1 |
| 3 | 5      | 2 |
| 4 | 9      | 3 |

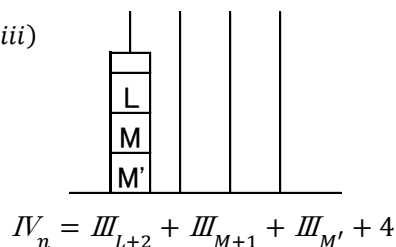
- ・(i)では $n = 4$ のとき $L = 3$ となり、分割しても同じ手順数をとるので、(ii)にも $n = 4$ を表示する。
- ・(i)では $n = 5$ のとき $L = 4$ となるので分割し、(ii)に $n = 5$ を表示する。

(ii)



| n | $IV_n$ | L+1 | M |
|---|--------|-----|---|
| 4 | 9      | 2   | 2 |
| 5 | 13     | 3   | 2 |
| 6 | 17     | 3   | 3 |
| 7 | 25     | 4   | 3 |
| 8 | 33     | 4   | 4 |

(iii)



| n  | $IV_n$ | L+2 | M+1 | M' |
|----|--------|-----|-----|----|
| 7  | 25     | 3   | 3   | 3  |
| 8  | 33     | 4   | 3   | 3  |
| 9  | 41     | 4   | 4   | 3  |
| 10 | 49     | 4   | 4   | 4  |
| 11 | 65     | 5   | 4   | 4  |
| 12 | 81     | 5   | 5   | 4  |
| 13 | 97     | 5   | 5   | 5  |

- ・(ii)では $n = 9$ のとき $L + 1 = 5$ すなわち $L = 4$ となるので分割し、(iii)に $n = 9$ を表示する。
- ・(ii)では $IV_n = III_{L+1} + III_M + 3$ となるので、 $L + 1$ と $M$ をできるだけ近い値にすると最小手順となる。同様に(iii)では、相加平均と相乗平均の不等式から $L + 2$ 、 $M + 1$ 、 $M'$ をできるだけ近い値にすると最小手順となる。

ここで、分割の仕方が1通りしかない $n$ を質の良い $n$ と定義する。※ただし、 $n = 2$ は例外とする。

$x = 4$ における質の良い $n$ は1, 3, 6, 10...となり、これらは、塔の上から順に1, 2, 3, 4...枚と分割される。

さらに、質の良い $n$ を小さい順に $s = 1, s = 2 \dots$ と定義し、また質の良いくない $n$ は、それを越えない最大の質の良い $n$ と $s$ の値が一致するものと定義する。

3 ページの表より、 $n$ の値が 3~6 間で 1 ずつ上がっていくとき、 $2^2$ が $2^3$ に変わっていく(表の右側の値が 2 から 3 に変わるため)ので $IV_n$ は $2^2$ ずつ増える。

$n$ の値が 6~10 間で 1 ずつ上がっていくとき、 $2^3$ が $2^4$ に変わっていくので $IV_n$ は $2^3$ ずつ増える。

すなわち、質の良い $n$ 間では $2^s$ ずつ $IV_n$ が増加する。

また、質の良い $n$ の分割の仕方に着目し、塊の動かし方を考える。

質の良い $n$ は、塔の上から順に 1, 2, 3, 4...枚と分割されるので、

$n = 3$ のとき、まず 4 本の柱を用いて 1 枚の円盤を動かし、次に残りの 3 本で 2 枚の円盤を動かす。

最後に、初めに動かした 1 枚を 4 本の柱を用いて動かすので、 $IV_3 = 2IV_1 + III_2$

$n = 6$ のとき、まず 4 本の柱を用いて  $3(= 1 + 2)$ 枚の円盤を動かし、次に残りの 3 本で 3 枚の円盤を動かす。最後に、初めに動かした 3 枚を 4 本の柱を用いて動かすので、 $IV_6 = 2IV_3 + III_3$

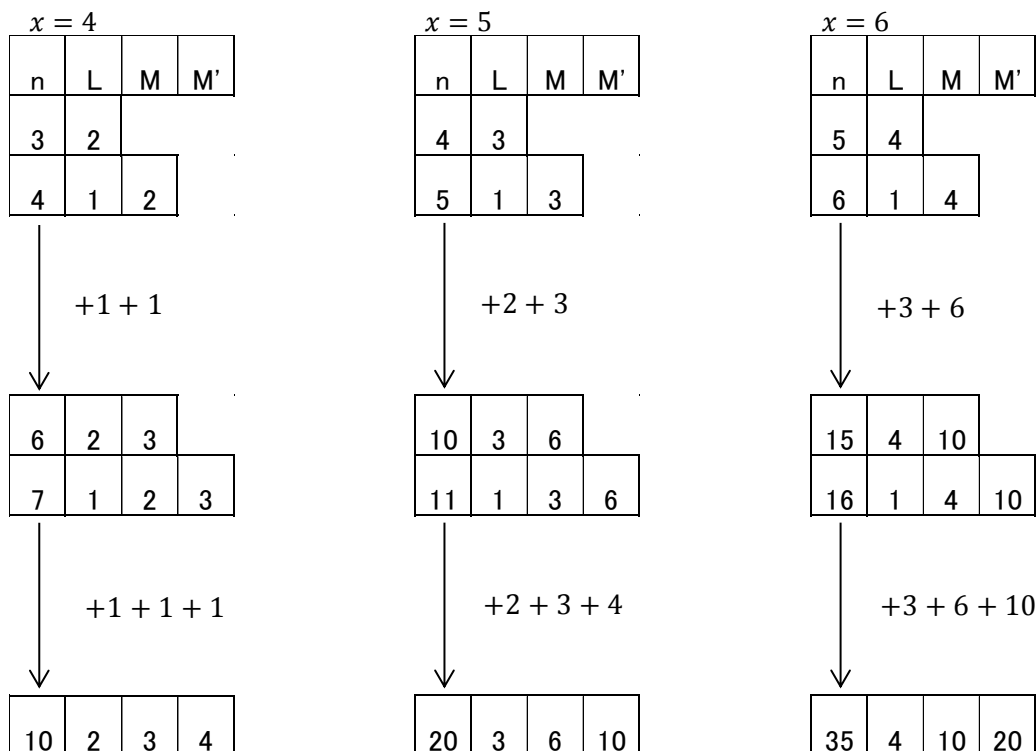
$n = 10$ のとき、まず 4 本の柱を用いて  $6(= 1 + 2 + 3)$ 枚の円盤を動かし、次に残りの 3 本で 4 枚の円盤を動かす。最後に、初めに動かした 6 枚を 4 本の柱を用いて動かすので、 $IV_{10} = 2IV_6 + III_4$

以上の性質を用いて $IV_n$ を一般化すると、

$$IV_n = \left\{ n - \frac{1}{2} \cdot \left( \left[ \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right]^2 - \left[ \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right] \right) - 1 \right\} \cdot 2^{\left\lfloor \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} \right\rfloor} + 1$$

### 3. 各 $x$ における質の良い $n$

ここでは、 $L$ をできるだけ分割して、同様に表を作成し考察する。

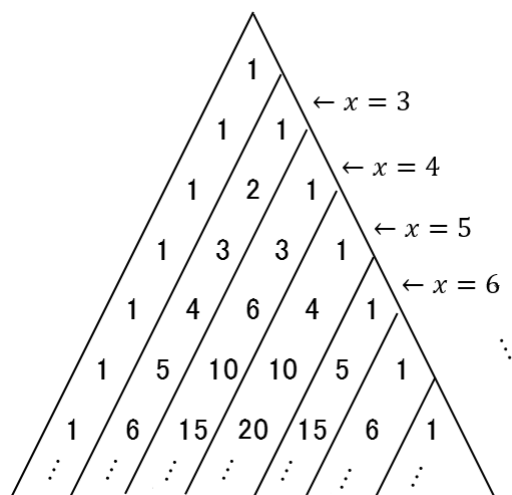


前ページの表から、次のことが分かった。

$x = 5$ における質の良い $n$ は、1, 4, 10, 20… すなわち、 $x = 4$ における質の良い $n$ の総和。

$x = 6$ における質の良い $n$ は、1, 5, 15, 35… すなわち、 $x = 5$ における質の良い $n$ の総和。

よって、各 $x$ における質の良い $n$ は次のように表せる。



・左図のようにパスカルの三角形を斜めに見たときの数列は、各 $x$ での質の良い $n$ と一致する。

・また、 $x = 3$ における質の良い $n$ は、すべての自然数と考えることもできる。

$IV_n$ と同様に計算から、柱が $x$ 本、円盤が $n$ 枚のハノイの塔の最小手順の数は、

$$n = s + x - 3 \mathbf{C}_{x-2} + r$$

としたとき、

※ただし、 $x$ は $x \geq 3$ となる整数、 $n$ は自然数、 $r$ は非負整数で、 $s$ は上の式を満たす最大の自然数とする。

$$\sum_{k=1}^s k + x - 4 \mathbf{C}_{x-3} \cdot 2^{k-1} + r \cdot 2^s$$

で求められる。

## 今後の課題

今回の研究で、質の良くない $n$ では分割の仕方が複数通りあり最小手順をとる円盤の動かし方が複数通りあることがわかった。

それが一体、何通りあるのかについても考察したい。

また、柱が $x$ 本、円盤が $n$ 枚のハノイの塔の最小手順の数を表す式を別の方法で求められるかどうかとも検討したい。