

指折り掛け算の拡張

Extension of multiplication by bending fingers

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年

齋藤 諒明

目的

計算できる数が限られてしまっている指折り掛け算を拡張し、暗算ではすぐに答えが出せないような掛け算でも指で行うことにより計算を簡略化し、正確な答えを出す。

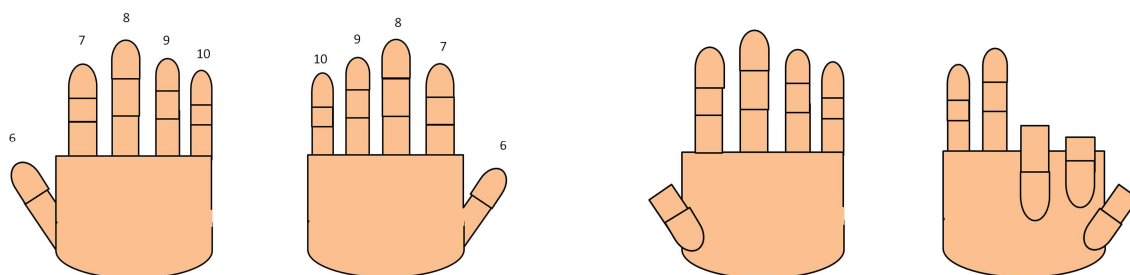
指折り掛け算とは

- ・左右の指 10 本を使用して行う掛け算。
- ・1～5 の段までの掛け算を教わった欧米諸国の子供たちの間でより大きな数の掛け算をするために広まっていった（よって 1～5 の掛け算はできることを前提とする）
- ・一般に知られている方法は 6～10、11～15 の 2 種類の範囲での指の折り方があり、指折り掛け算を行うには計算できる数がどちらかの範囲に含まれていなければならない

〈基本的な方法 I（6～10 のとき）〉

- ① 両手に親指から 6, 7, 8, 9, 10 と数字を割り当てていく
- ② 計算する 2 数と 2 数より小さい数に対応する指を折る
- ③ 折った指の本数を足し、さらに 10 を掛ける
- ④ 折っていない指の本数を掛ける
- ⑤ ③と④を足す

（例） $6 \times 8 = 48$ を指で行う場合



- ② 左手の親指の 1 本、右手の親指から中指の 3 本を折る
- ③ 左手の折っている 1 本と左手の折っている 3 本を足し 10 を掛ける $\Rightarrow (1 + 3) \times 10 = 40$
- ④ 左手の折っていない 4 本と右手の折っていない 2 本を掛ける $\Rightarrow 4 \times 2 = 8$
- ⑤ ③と④を足す $\Rightarrow 40 + 8 = 48$

（解説）

計算する 2 数を a 、 b とする

折った指はそれぞれ $a - 5$ 、 $b - 5$ とあらわせる

また、折っていない指はそれぞれ $10 - a$ 、 $10 - b$ とあらわせる

③の操作は $\{(a - 5) + (b - 5)\} \times 10$

④の操作は $(10 - a)(10 - b)$

$$\begin{aligned}
& \textcircled{3}+\textcircled{4} \text{より} \quad \{(a-5)+(b-5)\} \times 10 + (10-a)(10-b) \cdots * \\
& \quad = 10a + 10b - 100 + 100 - 10a - 10b + ab \\
& \quad = ab + 10a - 10a + 10b - 10b + 100 - 100 \\
& \quad = ab
\end{aligned}$$

したがって**基本的な方法Ⅰ**では $\{(a-5)+(b-5)\} \times 10 + (10-a)(10-b)$ の計算を指で行い積を求めていることになる

〈基本的な方法Ⅱ（11～15 のとき）〉

① 両手に親指から 11, 12, 13, 14, 15 と数字を割り当てていく

Ⅰの操作を

③折った指の本数を足し 10 を加えたのち、10 を掛ける

④折った指の本数を掛ける という操作に変える

(例)

$13 \times 13 = 169$ を行う場合

② 左手の親指から中指の 3 本と右手の親指から中指の 3 本を折る

③ 左手の折っている 3 本と右手の折っている 3 本を足し 10 を加えたものに 10 を掛ける

$$\Rightarrow (3 + 3 + 10) \times 10 = 160$$

④ 折った指の本数を掛ける $\Rightarrow 3 \times 3 = 9$

⑤ ③と④を足す $\Rightarrow 160 + 9 = 169$

(解説)

計算する2数をa、bとする

折った指はそれぞれ $a-10, b-10$ とあらわせる

③の操作は $\{(a-10)+(b-10)+10\} \times 10$

④の操作は $(a-10)(b-10)$

$$\begin{aligned}
\textcircled{3}+\textcircled{4} \text{は} \quad & \{(a-10)+(b-10)+10\} \times 10 + (a-10)(b-10) \\
& = 10a + 10b - 100 + ab - 10a - 10b + 100 \\
& = ab + 10a - 10a + 10b - 10b + 100 - 100 \\
& = ab
\end{aligned}$$

したがって**基本的な方法Ⅱ**では $\{(a-10)+(b-10)+10\} \times 10 + (a-10)(b-10)$ の計算を指で行い積を求めていることになる

考察 1（下一桁が 6～0 のとき）

16～20の範囲について考える。

求める 2 数をa、bとすると折った指の数は $-15, b-15$ あらわせ、

折っていない指の数は $20-a, 20-b$ とあらわせる。

これを**基本的な方法Ⅰ**にあてはめると

$$\begin{aligned}
& \{(a-15)+(b-15)\} \times 10 + (20-a)(20-b) \\
& = 10a + 10b - 300 + 400 - 20a - 20b + ab \\
& = ab - 10a - 10b + 100 \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$-10a - 10b + 100$ が余分なのでこれを指の操作で消すことを考える。

$$-10a - 10b + 100 = -10(a + b - 10) = -10\{(a - 15) + (b - 15) + 20\}$$

これを①から引くと計算ができるはずである。

$$\begin{aligned} & \{(a - 15) + (b - 15)\} \times 10 + (20 - a)(20 - b) + 10(a - 15) + (b - 15) + 20\} \\ & = \{2(a - 15) + 2(b - 15) + 20\} \times 10 + (20 - a)(20 - b) \end{aligned}$$

よって 16～20 のとき、この式に対応する指の動かし方をすればいいので

I の③を「折った指の本数を足し 2 をかけ 20 を加え、さらに 10 を掛ける」という操作にかえることによって計算が行えるはずである。

同様に 26～30、36～40、46～50…と範囲を変えていくとき

$\{\square(a - \Delta) + \square(b - \Delta) + \circ\} \times 10 + (\bullet - a)(\bullet - b)$ の形で表すことができた。

範囲	□	△	○	●
6～10	1	5	0	10
16～20	2	15	20	20
26～30	3	25	60	30
36～40	4	35	120	40
46～50	5	45	200	50
10n-4～10n	n	10n-5	10n(n-1)	10n

$$\{n(a - 10n + 5) + n(b - 10n + 5) + 10n(n - 1)\} \times 10 + (10n - a)(10n - b)$$

という計算を指で行えばよい。a-10n+5、b-10n+5 は折った指の数を、10n-a、10n-b は折っていない指の本数を表しているから、**基本的な方法 I** の③を「折った指の本数を足し n をかけ 10n(n-1) を加え、さらに 10 を掛ける」という操作にかえることによって計算ができるはずである。

考察 2（下一桁が 1～5 のとき）

考察 1 と同様の手順で 21～25 について**基本的な方法 II**にあてはめていくと、
-10a-10b+100 が余りとして出てくる。

$$-10a - 10b + 100 = -10(a + b - 10) = -10\{(a - 20) + (b - 20) + 30\}$$

$$\begin{aligned} & \text{と変形できるので } \{(a - 20) + (b - 20) + 10\} \times 10 + (a - 20)(b - 20) \\ & + 10\{(a - 20) + (b - 20) + 30\} \end{aligned}$$

$$= \{(a - 20) + (b - 20) + 20\} \times 20 + (a - 20)(b - 20) \cdots \cdots *$$

よって 21～25 のとき*の操作を指で行えば計算ができるはずである。

このような方法で範囲を変えていき、 $\{(a - \square) + (b - \square) + \square\} \times \square + (a - \square)(b - \square)$ とすると下の表のような規則性が見られた。

範囲	□	範囲	□
11～15	10	41～45	40
21～25	20	51～55	50
31～35	30	10n+1～10n+5	10n

したがって 10n+1～10n+5 の範囲の 2 数の計算では*は次のようにあらわせる。

$$\{(a - 10n) + (b - 10n) + 10n\} \times 10n + (a - 10n)(b - 10n)$$

a-10n、b-10n は折った指を表しているの、**基本的な方法 II** の③を「折った指の本数を足し 10n を

加えたのち、 $10n$ を掛ける」という操作に変えることによって計算ができるはずである。

考察 3

考察 1 と 2 の二つの計算方法が生まれてしまったので、これを一つにまとめることを考える。

計算する範囲を $5m-4$ から $5m(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$ とし、 c と d の積を求めるとき

折った指の数は $c-5m+5$ 、 $d-5m+5$ 折っていない指の数は $5m-c$ 、 $5m-d$ とあらわせる。これを基本的な方法 I にあてはめると

$$\begin{aligned} & \{(c-5m+5) + (d-5m+5)\} \times 10 + (5m-c)(5m-d) \\ &= 10c + 10d - 100m + 100 + 25m^2 - 5cm - 5dm + cd \\ &= cd + 25m^2 - 5cm - 5dm - 100m + 10c + 10d + 100 \\ &= cd + 5(5m^2 - cm - dm - 20m + 2c + 2d + 20) \\ &= cd + 5(m-2)(5m-c-d-10) \\ &= cd - (5m-10)(c+d-5m+10) \\ &= cd - (5m-10)\{(c-5m+5) + (d-5m+5) + 5m\} \end{aligned}$$

このことから $5m-4$ から $5m(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$ の範囲での 2 数の積は次のように求められることがわかる。

$$\{(c-5m+5) + (d-5m+5)\} \times 10 + (5m-c)(5m-d) + (5m-10)\{(c-5m+5) + (d-5m+5) + 5m\}$$

$\alpha = c-5m+5, \beta = d-5m+5$ とおくと

$$(\alpha + \beta) \times 10 + (5 - \alpha)(5 - \beta) + (5m - 10)(\alpha + \beta + 5m)$$

ここでの α, β は折った数を、 $5-\alpha, 5-\beta$ は折っていない数を表しているので、 $(\alpha + \beta) \times 10 + (5 - \alpha)(5 - \beta)$ は基本的な方法 I の * そのものである。

したがって、 $5m-4$ から $5m(m \geq 2, m \in \mathbb{N})$ の範囲での 2 数の積は

$$\begin{aligned} & (\text{折った指の和}) \times 10 + (\text{折っていない指の積}) \\ & + \{ (\text{範囲の最大}) - 10 \} \{ (\text{折った指の和}) + (\text{範囲の最大}) \} \end{aligned}$$

結論と今後の展望

はじめの範囲は $6 \sim 10$ 、 $11 \sim 15$ というものだったが $10n-4 \sim 10n$ 、 $10n+1 \sim 10n+5$ という範囲を経て、最終的には $5m-4 \sim 5m$ にまで拡張できた。

しかし、計算する数同士が大きくなっていくごとに暗算で行う部分の計算も複雑になっていくのでその場合の式も新たに考える必要がある。