

$(a+bi)^n$ の規則性

Regularity of the Expansion of $(a+bi)^n$

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
井上 竜徳 唐橋 幸佑

目的

複素数の n 乗についてド・モアブルの定理が知られているが、私たちは $(a+bi)^n$ を直接展開することによって現れる規則性を探ろうと試みた。

前提

ド・モアブルの定理

複素数平面上において

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos (n \theta) + i \sin (n \theta)$$

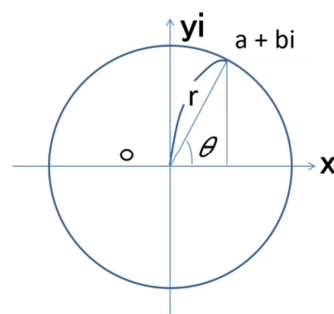
が成り立つ。

例) 図において、

$a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ が成り立つことから、

$$a + bi = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore (a + bi)^n = r^n \{ \cos(n \theta) + i \sin(n \theta) \}$$



考察

n を固定して a , b をそれぞれ変化させたときの規則性を考える。

(i) $n = 2$ のとき、

$(a + bi)^2$ の結果

bi) ² の結果		a				
n = 2		1	2	3	4	5
b	1	2i	3+4i	8+6i	15+8i	24+10i
	2	-3+4i	8i	5+12i	12+16i	21+20i
	3	-8+6i	-5+12i	18i	7+24i	16+30i
	4	-15+8i	-12+16i	-7+24i	32i	9+40i
	5	-24+10i	-21+20i	-16+30i	-9+40i	50i

a が 1 増加するにつれて実部が $2a + 1$ ずつ増加し、虚部が $2b$ ずつ増加する…①

b が 1 増加するにつれて実部が $2b + 1$ ずつ減少し、虚部が $2a$ ずつ増加する…②

① 例 : $b = 1$ と固定した場合、以下ようになる。

a を 1 から変化させると、 実部

虚部

$$\begin{array}{lcl}
 a = 1 \Rightarrow 0 & & 2i \\
 a = 2 \Rightarrow 3 & \left. \begin{array}{l} \text{(+ 2} \times \boxed{1} + 1 \end{array} \right\} & 4i \\
 a = 3 \Rightarrow 8 & \left. \begin{array}{l} \text{(+ 2} \times \boxed{2} + 1 \end{array} \right\} & 6i
 \end{array}
 \begin{array}{lcl}
 & & b \\
 & & \left. \begin{array}{l} \text{(+ 2} \times \boxed{1} \end{array} \right\} i \\
 & & \left. \begin{array}{l} \text{(+ 2} \times \boxed{1} \end{array} \right\} i
 \end{array}$$

となる。

②もこれと同様のことが起こる。

*ただし、②の場合、虚数単位 i を 2 乗するため $(2b + 1)$ の係数は (-1) となる。

これは、

$$(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$\{ (a + 1) + bi \}^2 = (a^2 - b^2 + 2a + 1) + (2ab + 2b)i$$

$$\{ a + (b + 1)i \}^2 = (a^2 - b^2 - 2b - 1) + (2ab + 2a)i$$

となることからわかる。

前ページの表の

- ・ a 列目の複素数を $(a + b_1 i)^2, (a + b_2 i)^2, \dots$
- ・ b 行目の複素数を $(a_1 + bi)^2, (a_2 + bi)^2, \dots$

と表すと、 $\{a_m + bi\}^2$ と $\{a + b_m i\}^2$ の実部の一般項が 2 次の関数であることから第 1 階差数列が等差数列になる。それに対し、虚部の一般項が 1 次の関数であることから等差数列になる。…③

③ 例 1 :

$\{a_m + bi\}^2$ のとき、 $b = 1$ と固定した場合

実部 :

0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, ...
 \
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...

第 1 階差数列をとると、公差が 2 の等差数列になる。

虚部 :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...

公差が 2 の等差数列である。

例 2 :

$\{a + b_m i\}^2$ のとき、 $a = 1$ と固定した場合

実部 :

0, -3, -8, -15, -24, -35, -48, -63, -80, -99, ...
 \
-3, -5, -7, -9, -11, -13, -15, -17, -19, ...

第 1 階差数列をとると、公差が-2 の等差数列になる。

虚部 :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ...

公差が 2 の等差数列である。

$\{a_m + bi\}^2$ と $\{a + b_m i\}^2$ を複素平面上に表したとき、原点からの距離を数列として表すと、第 1 階差数列は公差が 2 の等差数列になる。…④

④ 例 :

$\{a_m + bi\}^2$ のとき、 $b = 1$ とした場合、距離は $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ より

2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...
 \
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

第 1 階差数列をとると、公差が 2 の等差数列になる。

※ここで、登場した公差は $2 = 2! = n!$ と表すことができる。

(ii) $n = 3$ のとき、

$(a + bi)^3$ の結果

bi) ³ の結果		a				
n = 3		1	2	3	4	5
b	1	-2+2i	2+11i	18+26i	52+47i	110+74i
	2	-11-2i	-16+16i	-9+46i	16+88i	65+142i
	3	-26-18i	-46+9i	-54+54i	-44+117i	-10+198i
	4	-47-52i	-88-16i	-117+44i	-128+128i	-115+236i
	5	-74-110i	-142-65i	-198+10i	-236+115i	-250+250i

a が 1 増加するにつれて実部が $3a^2 + 3a + 1 - 3b^2$ ずつ増加し、

虚部が $6ab + 3b$ ずつ増加する…①

b が 1 増加するにつれて実部が $6ab + 3a$ ずつ減少し、

虚部が $3b^2 + 3b + 1 - 3a^2$ ずつ減少する…②

① 例 : $b = 1$ と固定した場合、以下のようになる。

a を 1 から変化させると、

$$\begin{array}{lcl}
 a = 1 \Rightarrow & \text{実部} & \\
 a = 2 \Rightarrow & -2 & \\
 a = 3 \Rightarrow & 18 &
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 (+ (3 \times \boxed{2})^2 + 3 \times \boxed{2} + 1 - (3 \times \boxed{1})^2) \\
 (+ (3 \times \boxed{1})^2 + 3 \times \boxed{1} + 1 - (3 \times \boxed{1})^2)
 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{虚部} & \\
 & 2i & \\
 & 11i & \\
 & 26i &
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 (+ 6 \times \boxed{1} \times \boxed{1} + 3 \times \boxed{1})i \\
 (+ 6 \times \boxed{2} \times \boxed{1} + 3 \times \boxed{1})i
 \end{array} \right\} \text{ となる。}$$

② は実部、虚部でこれと逆のことが起こる。

*ただし、② の場合、虚数単位 i を 2 乗するため $(6ab + 3a)$ と $(3b^2 + 3b + 1 - 3a^2)$ の係数は (-1) となる ($i^3 = i^2 * i = (-1) * i$ より)。

これは、

$$\begin{aligned}
 (a + bi)^3 &= \{a^3 - 3ab^2\} + \{3a^2b - b^3\}i \\
 \{(a + 1) + bi\}^3 &= \{a^3 - 3ab^2 + 3a^2 + 3a + 1 - 3b^2\} + \{3a^2b - b^3 + 6ab + 3b\}i \\
 \{a + (b + 1)i\}^3 &= \{a^3 - 3ab^2 - 6ab - 3a\} + \{3a^2b - b^3 - 3b^2 - 3b - 1 + 3a^2\}i
 \end{aligned}$$

なることからわかる。

前ページと同様に $(a_n + bi)^3$, $(a + b_n i)^3$ を定めると、 $\{a_n + bi\}^3$ の実部の一般項が 3 次の関数であることから、第 2 階差数列が等差数列になる。それに対し、虚部の一般項が 2 次の関数であることから、第 1 階差数列が等差数列になる。

また、 $\{a + b_n i\}^3$ の実部の一般項が 2 次の関数であるということから、第 1 階差数列が等差数列になる。それに対し、虚部の一般項が 3 次の関数であることから、第 2 階差数列が等差数列になる。…③

③ 例 1 :

$\{a_n + bi\}^2$ のとき、 $b = 1$ と固定した場合

実部 :

$$\begin{array}{cccccccc}
 -2, & 2, & 18, & 52, & 110, & 198, & 322, & 490, \dots \\
 \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow & & & & & & & \\
 4, & 16, & 34, & 58, & 88, & 124, & 168, & \dots \quad (\text{第 1 階差数列}) \\
 \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow \swarrow \searrow & & & & & & & \\
 12, & 18, & 24, & 30, & 36, & 42, & \dots \quad (\text{第 2 階差数列})
 \end{array}$$

第 2 階差数列をとると、公差が 6 の等差数列になる。

虚部：

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2, & 11, & 26, & 47, & 74, & 107, & 146, & 191, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 9, & 15, & 21, & 27, & 33, & 39, & 45, & \cdots \end{array} \quad (\text{第 1 階差数列})$$

第 1 階差数列をとると、公差が 6 の等差数列になる。

例 2：

$\{ a + b_{\text{m}}i \}^2$ のとき、 $a = 1$ と固定した場合

実部：

$$\begin{array}{cccccccccccc} -2, & -11, & -26, & -47, & -74, & -107, & -146, & -191, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ -9, & -15, & -21, & -27, & -33, & -39, & -45, & \cdots \end{array} \quad (\text{第 1 階差数列})$$

第 1 階差数列をとると、公差が -6 の等差数列になる。

虚部：

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2, & -2, & -18, & -52, & -110, & -198, & -270, & -426, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ -4, & -16, & -34, & -58, & -88, & -114, & -156, & \cdots & (\text{第 1 階差数列}) \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ -12, & -18, & -24, & -30, & -36, & -42, & \cdots & (\text{第 2 階差数列}) \end{array}$$

第 2 階差数列をとると、公差が -6 の等差数列になる。

上と同様にして複素数の原点からの距離をとって数列に表すと、第 2 階差数列の階差は 6 に近似する。…④^ˆ

④^ˆ 例：

$\{ a_{\text{m}} + bi \}^2$ のとき、 $b = 1$ と固定した場合

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2\sqrt{2}, & 5\sqrt{5}, & 10\sqrt{10}, & 17\sqrt{17}, & 26\sqrt{26}, & 37\sqrt{37}, & 1250\sqrt{2}, & \cdots \\ \text{これを小数に直すと、} \\ 2.828, & 11.180, & 31.622, & 70.093, & 132.575, & 225.062, & 353.553, & \cdots \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 8.352, & 20.442, & 38.470, & 62.482, & 92.488, & 128.491, & \cdots & (\text{第 1 階差数列}) \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 12.090, & 18.028, & 24.012, & 30.006, & 36.003, & \cdots & (\text{第 2 階差数列}) \\ \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / & \backslash & / \\ 5.938, & 5.984, & 5.994, & 5.997, & \cdots & (\text{階差}) \\ \text{⌋} & \text{⌋} & \text{⌋} & \text{⌋} & & \\ 6 & 6 & 6 & 6 & & \end{array}$$

階差を 2 回とると、できた数列の階差が 6 に近似する。

※ここで、登場した階差は $6 = 3! = n!$ と表すことができる。

※④^ˆ で求めた第 2 階差数列の階差は、項数が大きくなればなるほど、6 に近づく。

結果

1) n を固定し、 a を変化させた場合の解の変化量は複素数 $(a + bi)^n$ を二項展開したときの a 、 b の次数で決まり、解の**実部**を数列で表すと、第 $((a \text{ の最高次数}) - 1)$ 階差数列が公差 $\pm (n!)$ の等差数列となる ($\Rightarrow$ 証明. 末尾付録)。 b を変化させたときの場合と符合は 3) を用いて判定する。

2) n を固定し、 a を変化させた場合の解の変化量は複素数 $(a + bi)^n$ を二項展開したときの a 、 b の次数で決まり、解の**虚部**を数列で表すと、第 $((a \text{ の最高次数}) - 2)$ 階差数列が公差 $\pm (n! \cdot b)$ の等差数列となる ($\Rightarrow$ 証明. 末尾付録)。 b を変化させたときの場合と符合は 3) を用いて判定する。

3) 上記の表での $a = b$ を挟んだ 2 数を考えるとき、 n を $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3 (k \in \mathbb{N})$ の 4 つに分け、 $(a + bi)^n = (c_1 + d_1 i)$ 、 $(b + ai)^n = (c_2 + d_2 i)$ とすると、

(i) $n = 4k$ のとき、

$$c_1 = c_2, d_1 = -d_2$$

(ii) $n = 4k + 1$ のとき、

$$c_1 = d_2, d_1 = c_2$$

(iii) $n = 4k + 2$ のとき、

$$c_1 = -c_2, d_1 = d_2$$

(iv) $n = 4k + 3$ のとき、

$$c_1 = -d_2, d_1 = -c_2$$

4) n を固定し、 a 、 b を変化させた場合の解の原点からの距離を数列で表すと、第 $(n-1)$ 階差数列は公差 $(n!)$ の等差数列になる (n が偶数の場合のみ)。 n が奇数の場合は、等差数列にはならないが、第 $(n-1)$ 階差数列の項差が $(n!)$ に近似する。

結論

$(a + bi)^n$ を直接展開することによって規則性を見出すことができた。加えて、1) より元の数列の各項の係数で階差数列の公差を表すと、 $(n!) = \sum_{k=1, n} \{ {}_n C_k \cdot k^n \cdot (-1)^{n+k} \}$ と導ける。

参考文献

www.geisya.or.jp

ja.wikipedia.org

多元連立 1 次方程式の解法マクロの使い方

(千葉工業大学 工学部 藤井研究室)

付録 証明

1)の証明： $(a+bi)^n$ において a の最高次数は n なので、 $(a+bi)^n$ の a を変化させたときに実部を $(n-1)$ 回階差をとる。このとき、公差が $(n!)$ の等差数列になることを証明する。

数列 $\{a_m\}$ を $a_m = \text{Re}\{(a+m)+bi\}^n$ とおくと、

$$a_m = \sum_{k=0, [n/2]} \{ {}_nC_{2k} * (a+m)^{n-2k} * (bi)^{2k} \} \quad \text{と表せる。}$$

$a + m = x$ と置くと、

$$a_m = x^n - {}_nC_2 * x^{n-2} * b^2 + {}_nC_4 * x^{n-4} * b^4 - \cdots \pm {}_nC_{2[n/2]} * x^{2[n/2]} * b^{2[n/2]} \quad \text{と表せる。}$$

ここで、 $a'_m = a_{m+1} - a_m$ と置く(操作1とする)と、

$$a'_m = \{ (x+1)^n - {}_nC_2 * (x+1)^{n-2} * b^2 + {}_nC_4 * (x+1)^{n-4} * b^4 - \cdots \pm {}_nC_{2[n/2]} * (x+1)^{2[n/2]} * b^{2[n/2]} \} \\ - \{ x^n - {}_nC_2 * x^{n-2} * b^2 + {}_nC_4 * x^{n-4} * b^4 - \cdots \pm {}_nC_{2[n/2]} * x^{2[n/2]} * b^{2[n/2]} \}$$

このとき、 a_{m+1} と a_m の初項にのみ注目すると、

$$(x+1)^n - x^n = \sum_{k=0, n} ({}_nC_k * x^k) - x^n = \sum_{k=0, n-1} ({}_nC_k * x^k) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と変形でき、次数が一つ下がっていることがわかる。

これを a_{m+1} と a_m の他の項にも行くと、同じ次数の $x+1$ と x の係数は等しいので、 $x+1$ と x の指数が0となったときに、末尾の項から打ち消しあう。

このとき、操作1を n 回行うので、 $(x+1)^n$ と x^n の階差数列のみを議論する。

数列 $\{d_m\}$ を $d_m = x^n$ とおく。

ここで、 $\{d_m\}$ で操作1を行うと、 $\textcircled{1}$ より

$$d'_m = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0, n-1} ({}_nC_k * x^k)$$

次に、 $\{d'_m\}$ で操作1を行うと、

$$d''_m = \sum_{k=0, n-1} \{ {}_nC_k * (x+1)^k \} - \sum_{k=0, n-1} ({}_nC_k * x^k)$$

$k=0$ の時は、 ${}_nC_k - {}_nC_k = 0$ より、

$$d''_m = \sum_{k=1, n-1} \{ {}_nC_k * (x+1)^k \} - \sum_{k=1, n-1} ({}_nC_k * x^k) = \sum_{k=1, n-1} [{}_nC_k * \{ (x+1)^k - x^k \}]$$

$\textcircled{1}$ より、

$$d''_m = \sum_{k=1, n-1} \{ {}_nC_k * \sum_{p=0, k-1} ({}_nC_p * x^p) \}$$

これより、操作1を1度行くと、末端にある x の累乗が d'_m になり、それぞれの Σ の初項が打ち消されることがわかる。

d_m の状態から操作1を n 回行くと

$$d_m^{(n)} = \sum_{k=n-1, n-1} ({}_nC_k * \sum_{p=n-2, k-1} ({}_nC_p * \sum_{q=n-3, p-1} ({}_nC_q * \cdots * \sum_{z=n-n, y-1} ({}_nC_z * x^z)))) \\ = \sum_{k=n-1, n-1} ({}_nC_k * \sum_{p=n-2, n-2} ({}_{n-1}C_p * \sum_{q=n-3, n-3} ({}_{n-2}C_q * \cdots * \sum_{z=n-n, n-n} ({}_{n-n+1}C_z * x^z))))$$

となり、

$$d_m^{(n)} = {}_nC_{n-1} * {}_{n-1}C_{n-2} * {}_{n-2}C_{n-3} * \cdots * {}_2C_1 * {}_1C_0 = n!$$

最後に、 $d_m^{(n)} = d_{m+1}^{(n-1)} - d_m^{(n-1)}$ となる $\{d_m^{(n-1)}\}$ は $\{a_m\}$ の第 $(n-1)$ 階差数列である。

よって、 $\{a_m\}$ の第 $(n-1)$ 階差数列は公差 $(n!)$ の等差数列になる。

2)の証明： $(a+bi)^n$ の b を変化させたときに実部を $(n-2)$ 回階差をとると、公差が $(n!*b)$ の等差数列になることを証明する。

1)の証明と同様にして、数列 $\{a_m\}$ を $a_m = \text{Im}\{(a+m)+bi\}^n$ とおくと、

$$a_m = \sum_{k=0, [(n-1)/2]} \{ {}_nC_{2k+1} * (a+m)^{n-2k-1} * (bi)^{2k+1} \} \quad \text{と表せる。}$$

$a + M = X$ と置くと、

a_m も初項が $n * X^{n-1} * b$ となるため、実数の時と同様にして、

$$d_m^{(n-1)} =$$

$$n \sum_{k=n-2, n-2} ({}_{n-1}C_k * \sum_{p=n-3, n-3} ({}_{n-2}C_p * \sum_{q=n-4, n-4} ({}_{n-3}C_q * \cdots * \sum_{z=n-n+1, n-n+1} ({}_{n-n+2}C_z * X^z)))) \\ = n * {}_{n-1}C_{n-2} * {}_{n-2}C_{n-3} * \cdots * {}_2C_1 * b = n! * b$$

最後に、 $d_m^{(n)} = d_{m+1}^{(n-1)} - d_m^{(n-1)}$ となる $\{d_m^{(n-1)}\}$ は $\{a_m\}$ の第 $(n-2)$ 階差数列である。

よって、 $\{a_m\}$ の第 $(n-2)$ 階差数列は公差 $(n!*b)$ の等差数列になる。