千葉県立船橋高等学校
普通科課題研究　2016 年

新しい立体パズルの作成とその数学的性質

The Creation of a New Cubic Puzzle and Its Mathematical Properties

千葉県立船橋高等学校普通科 3 年
松岡里衣 小坂友紀 名児耶美緒 並木千夏

Abstract

We made a new puzzle like Sudoku on a surface of a cube. The rules of this puzzle are as follows; First, divide each face of the cube into 3×3 squares. And the surfaces of them are painted in 9 different colors. Second, the squares sharing the same edge of the cube have the same color. We change the 9 colors into the numbers from 1 to 9, researching this puzzle.

We put hint numbers on an expanded diagram of the cube like Sudoku, and make a game. When the arranged numbers from 1 to 9 are on one face of the cube, we found that there are 734 ways to arrange remaining numbers. We paid attention to the same coloration among the 734 ways.

The same coloration is grouped by the operation that shuffles numbers from 1 to 9. The operations are 24 ways (6 faces × 4 directions). We found that 734 ways are classified into 60 groups. As a result, we found that the set of the 24 operations is the Permutation group for the operation of composition.

＜はじめに＞

立方体の表面に数独のような考えを取り入れたら、新しいパズルができるのではないかと思い、試行錯誤した。その結果、本研究で用いるパズルにたどり着き研究を始めた。

＜研究目的＞

1. パズルのルール

①立方体の各面を 3×3 のマスに区切り 9 色を配置する

②辺を挟んで接するマスは同じ色にする（図 I ）

③考える上で色を数字で置き換える

図 I

2. 目的

①ゲーム化する

②数字の入れ方が何通りあるのかなど、規則性を見つけ出す

＜考察＞

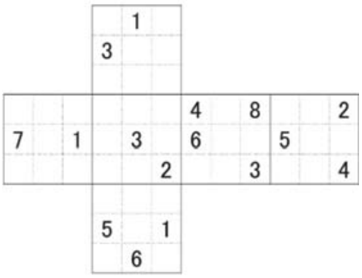
1. ゲーム化

数独の作り方を参考にし、数字の入っていない展開図にヒントの数字を入れていった。

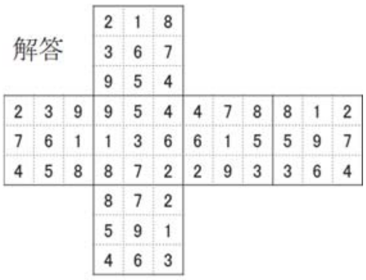
この中で最小ヒント数は 9 個であり、ヒントに使う数字は 8 種類以上で角に 2 か所以上入っていないと解くことができない。

＜具体例＞

ヒント数：16 個
数字の種類：8 種類
角：6 か所

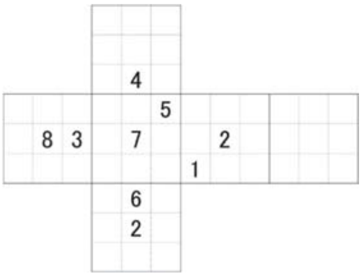


解答

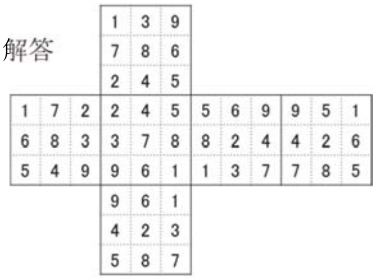


＜最小ヒント数の例＞

ヒント数：9 個
数字の種類：8 種類
角：2 か所



解答

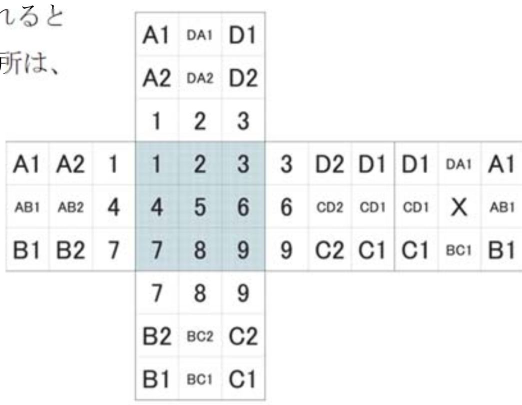


2. 数字の入れ方の総数

図の網掛のように数字が並んだ面を基本面とし、図の位置に固定し基本面以外のマスを文字で表す。A1→B1→C1→D1→A2→B2→C2→D2→AB1→BC1→CD1→DA1→AB2→BC2→CD2→DA2→X の順で前提を満たすように数字を入れていく。なお、A1～DA1 に数字を入れると各面で 8 個の数字が入るので AB2,BC2,CD2,DA2,X の 5 か所は、自動的に入る数字が決定する。

このような手順で数字を決めると、全部で 734 通りの入れ方があることが分かった。

これらに 1～734 までの通し番号をつけることにする。

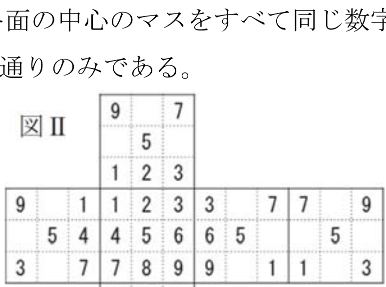


また、パズルを単純化するために、立方体の各面を 2×2 のマスに区切ったパズルも考えたが、数字の入れ方が 1 通りしかないことが分かったため、研究対象から外した。

3. 各面の中心の数をすべて同じ数字にした場合

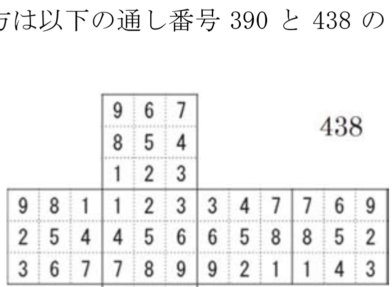
各面の中心のマスをすべて同じ数字にした場合(図Ⅱ)の数字の入れ方は以下の通し番号 390 と 438 の 2 通りのみである。

図Ⅱ



390

438

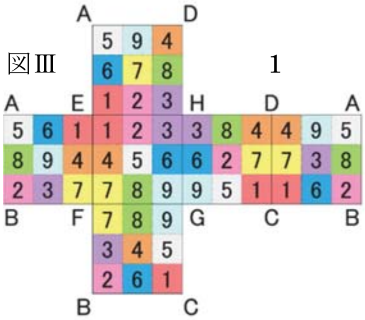


4. 分類

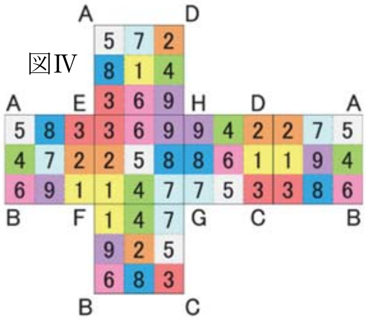
たとえば、図Ⅲの数字を $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 6 & 9 & 2 & 5 & 8 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ のように置き換えると図Ⅳになり、基本面の数字が左に 90°回転している。図Ⅳの展開図の開き方を変えたものが図Ⅴである。

図Ⅲと図Ⅴを比較すると、赤のマスは入っている数字は異なるが、両方とも頂点 C,E に入っているため、2 つのマスの位置関係は同じである。他の色のマスも同様である。よって図Ⅲと図Ⅴの数字の入れ方は異なるが、色分けは同じである。このように、通し番号 1 と 140 のような色分けが同じになるものを同じグループとして分類することを考えた。

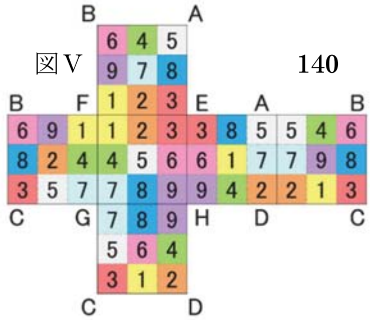
図Ⅲ　1



図Ⅳ



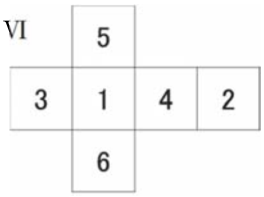
図Ⅴ　140



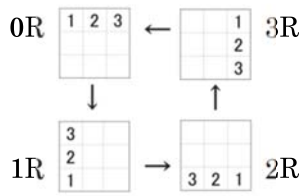
図Ⅵの面 1 を f(fix),面 2 を o(opposite),面 3 を l(left),面 4 を r(right),面 5 を u(up),面 6 を d(down)とし、図Ⅶのように基本面の数字を左に 0°回転させたものを 0R、90°回転を 1R、180°回転を 2R、270°回転を 3R と定める。以上を組み合わせると、基本面の移動は f0R,f1R,f2R,f3R,o0R…l0R…r0R…u0R…d0R…d3R の 24 通りの操作で表せる。たとえば、図Ⅲに f1R の操作をしたものが図Ⅳすなわち図Ⅴである。

なお、f0R は基本面の移動がないことを意味する。

図Ⅵ

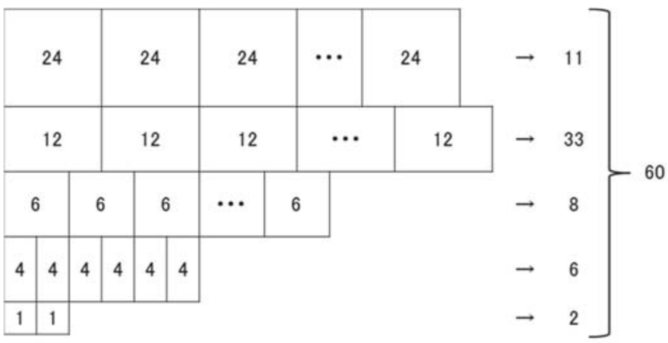


図Ⅶ



734 通りの入れ方について、24 通りの操作を行い分類すると、60 のグループに分割できることが分かった。図Ⅷはこの分類のイメージ図である。1 つのグループに 24 通り入るものが 11 グループ、12 通り入るものが 33 グループ、6 通り入るものが 8 グループ、4 通り入るものが 6 グループ、1 通りだけのものが 2 グループある。1 通りだけの 2 つのグループは「3. 各面の中心のマスをすべて同じ数字にした場合」で出来た 2 通りの入れ方であり、それぞれが 1 つのグループを形成している。

図Ⅷ



5. 分類操作における代数的性質

「4. 分類」で定めた 24 通りの操作を要素とする集合をAとする。x, yをAの任意の要素とし、2 つの操作をx, yの順に行うことを$x * y$で表すと、$x \in A, y \in A \Rightarrow x * y \in A$が成り立つ。

たとえば、図Ⅸのようにl3Rの操作を行い、基本面が fix の位置に 0R の向きで入るように展開図の開き方を変える。[(1)→(2)]

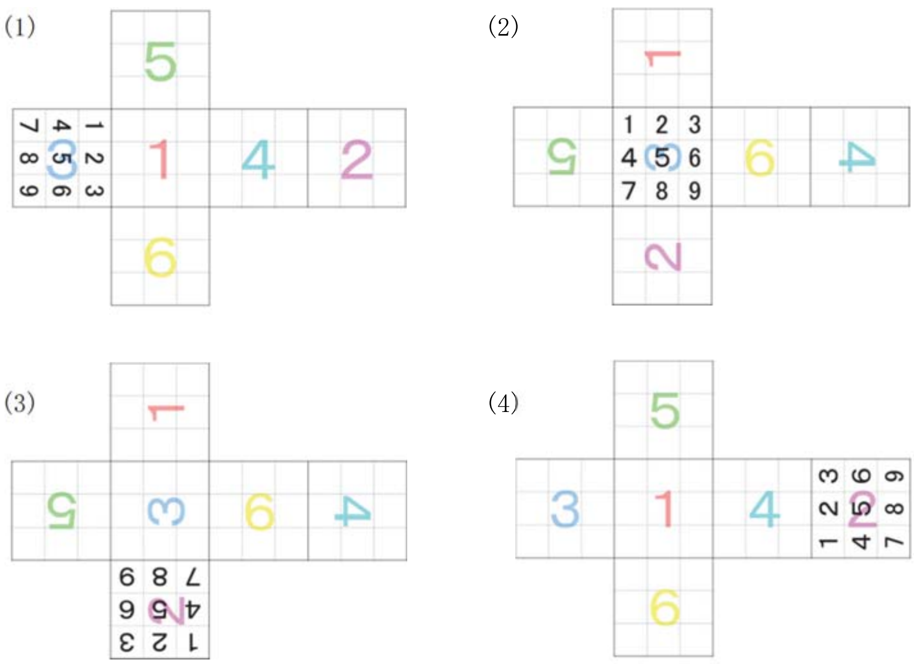
これにd2Rの操作を行い、展開図の開き方を変えると、o1Rの操作を行った結果と同じになる。

[(2)→(3)→(4)]

よって、$\mathrm{l3R} * \mathrm{d2R} = \mathrm{o1R} \in A$である。

このように$x * y$は基本面の移動になるので必ず集合Aの要素のいずれかになる。

図Ⅸ



上で定義した$x * y$の演算$*$に関してAは群になることを示す。

①Aの単位元が存在する

f0R は恒等置換であるので、任意の要素$x \in A$に対して、$x * \mathrm{f0R} = \mathrm{f0R} * x = x$が成り立つ。

これより、f0R はAの単位元である。

②任意の要素$x \in A$の逆元x^{-1}が存在する

たとえば、図Ⅹのようにu3Rの操作を行い、基本面が fix の位置に 0R の向きで入るように展開図の開き方を変え、さらにr1Rの操作を行う。[(1)→(2)→(3)]

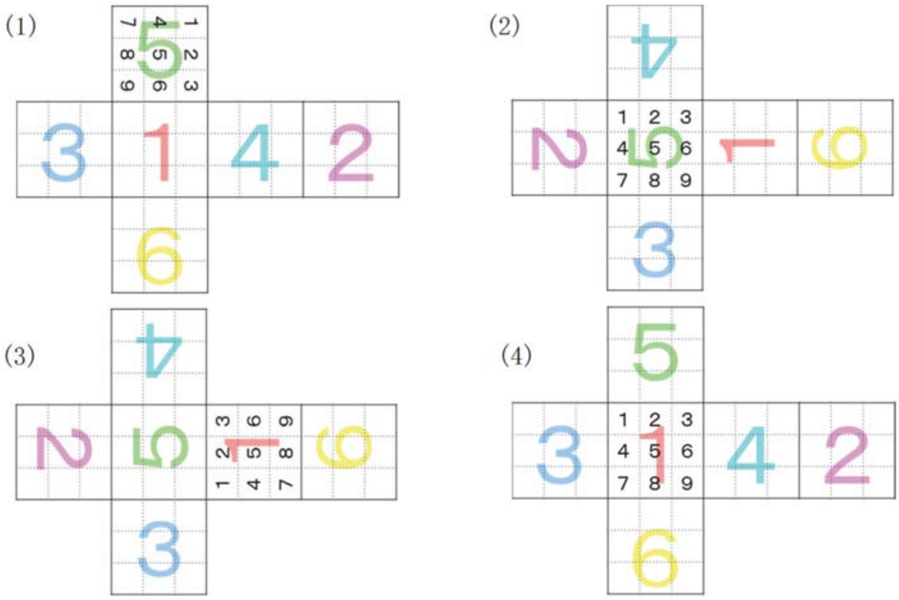
(4)は(3)の展開図の開き方を変えたもので、基本面が fix の位置に 0R の向きで入っている。

すなわち、$\mathrm{u3R} * \mathrm{r1R} = \mathrm{f0R}$が成り立つ。また、同時に$\mathrm{r1R} * \mathrm{u3R} = \mathrm{f0R}$も示される。

このように、任意の$x \in A$が表す基本面の移動に対して、逆の移動を行う操作もまた基本面の移動である。

よって、$x * \alpha = \alpha * x = \mathrm{f0R}$となる$\alpha \in A$が存在し、$\alpha$とは$x$の逆元$x^{-1}$である。

図X



③結合法則が成立する

実際、Aの要素は「4. 分類」で行ったような{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}上の置換であり、演算*は 2 つの置換の合成なので結合法則が成り立つ。

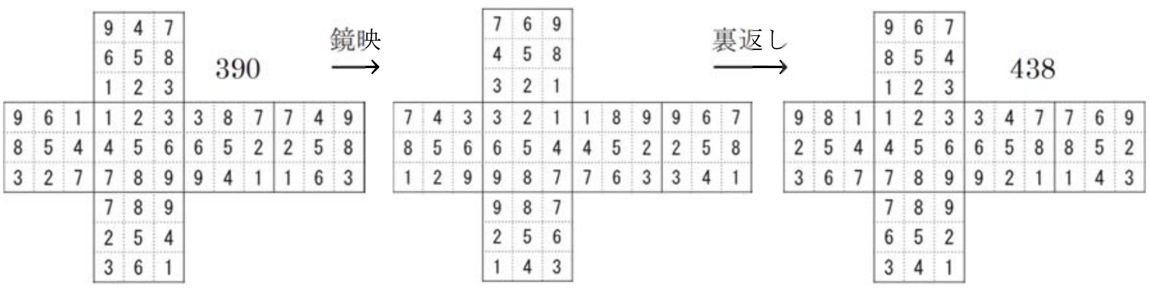
以上からAは位数 24 の置換群といえる。

また、集合{f0R, f1R, f2R, f3R}は集合Aの部分群であり、交換法則が成り立つことが分かった。これより、この集合は部分群の中でも可換群になっている。

＜今後の課題＞

①代数学の考えからさらに規則性を探る

たとえば、通し番号 390 について基本面が鏡映するような置換を行い、展開図を裏返すと通し番号 438 になることが分かっている。それが他の 732 通りにも成り立つ性質なのかを探る。



②ゲーム化をする上で、現在見つかった最小ヒント数について検証する

＜参考文献＞

BLUE BACKS　群論入門～対称性をはかる数学 ～ 芳沢 光雄 著