複素数における約数の総和

The Total of Divisors in Complex Number

千葉県立船橋高等学校　理数科 3 年
吉原和志

Abstract

In Complex number, I tried to decide the divisors and find the relationship between the number and the total of the number's divisors. Complex number is the number which is explained $a + b\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i}$ is the imaginary unit which is square root of -1, a and b are real numbers.) In complex number, prime factorization is not only one pattern, because this decomposition ignores the multiplication of the units. The result is that I found two ways to get the total of divisors. One way is that I make the prime factors even by using the units. The other way is that I make the divisors even by using only positive divisors. In both ways, the totals and the numbers have positive relationship, and several ratios have similar values.

目的

複素数において約数を定義し、約数の総和と元の数との関係を調べる。

前提

約数　　：ある数を割り切れることのできる数のこと。

複素数　：実数 a, b と虚数単位 $\boldsymbol{i}$ $(\sqrt{-1})$ を用いて、$a + b\boldsymbol{i}$ と表せる数。特にa, b が整数のものをガウス整数と呼ぶ。また、複素数における素数をガウス素数と呼ぶ。

単数　　：1 の約数。複素数においては $(1, \boldsymbol{i}, -1, -\boldsymbol{i})$ の 4 つのみである。

絶対値　：$a + b\boldsymbol{i}$ に対して、$\sqrt{a^2 + b^2}$

$\sigma(n)$　　：n の約数の総和を表す。

整数において、約数の総和を求める公式は、

整数 $a = p_1^{b_1} \times p_2^{b_2} \times p_3^{b_3} \times \cdots \times p_k^{b_k}$ $(p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ は異なる素数) ならば、

$\sigma(a) = \left\{1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{b_1}\right\} \times \left\{1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{b_2}\right\} \times \cdots \times \left\{1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{b_k}\right\}$ となる。

複素数において素因数分解の一意性は成り立つが、単数による掛け合わせを無視するため、ただ 1 通りにならない。ここでいう“単数による掛け合わせを無視する”とは、

$(8 + \boldsymbol{i}) = (-\boldsymbol{i})(-1 + 8\boldsymbol{i}) = (-1)(-8 - \boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{i})(1 - 8\boldsymbol{i})$ というように単数をかけることで等しくなる数同士を同じ数として見ると言うことである。

例えば、$8 + \boldsymbol{i}$ $= (2 - \boldsymbol{i})(3 + 2\boldsymbol{i})$

$= (1 + 2\boldsymbol{i})(2 - 3\boldsymbol{i})$

$= (-2 + \boldsymbol{i})(-3 - 2\boldsymbol{i})$

$= (-1 - 2\boldsymbol{i})(-2 + 3\boldsymbol{i})$　　これら 8 つは全てガウス素数であり、素因数である。

複素数において、大小を比較するときは絶対値を用いることとする。

＜約数を揃える方法＞

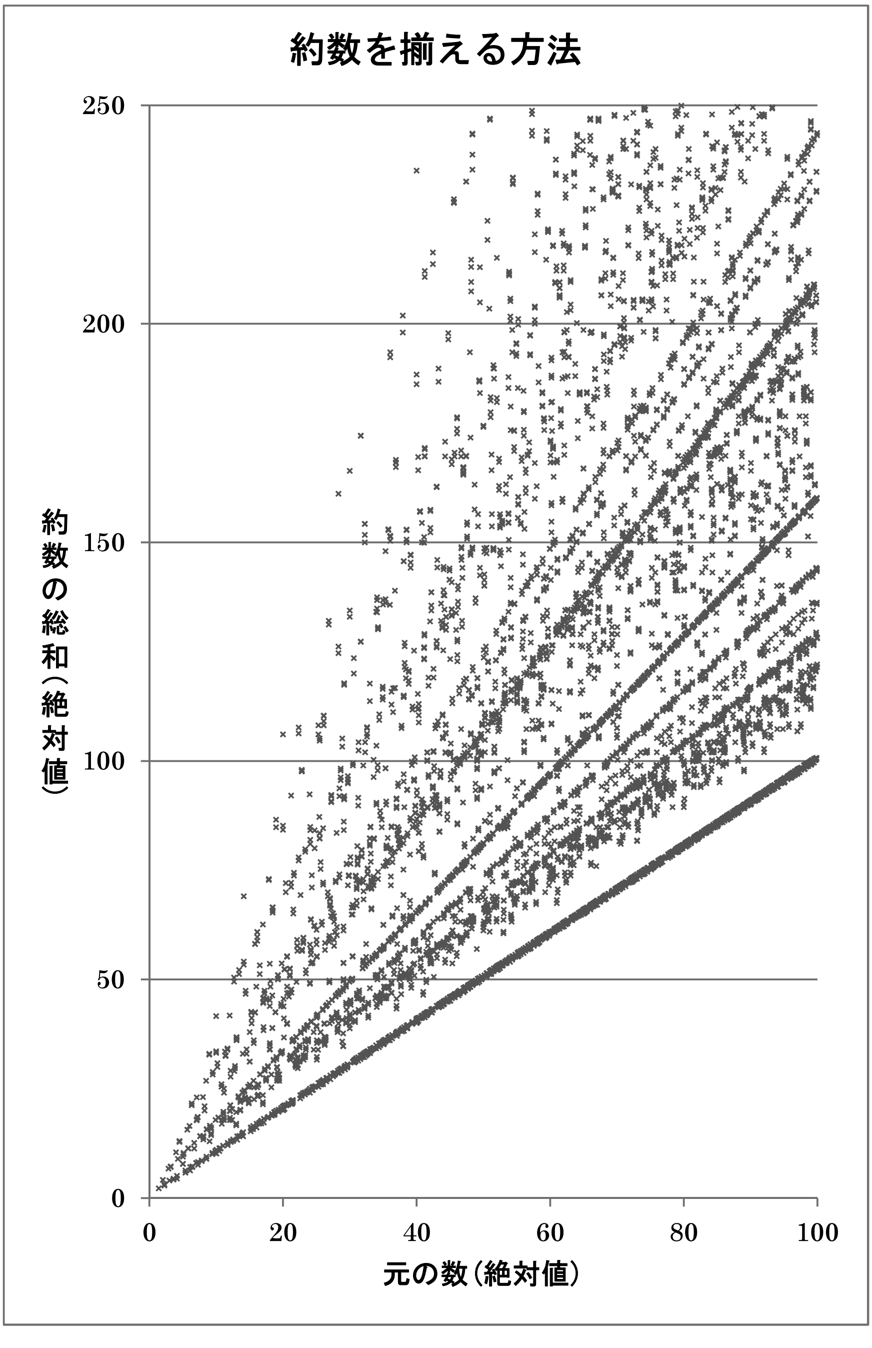
数は全て自明な約数を持っている。自明な約数とは、1 と自身のことであり、この 2 つは約数である。複素数において、単数の掛け合わせは意味を持たないので、ある複素数c の自明な約数は $(1, \boldsymbol{i}, -1, -\boldsymbol{i}, \mathrm{c}, \boldsymbol{i}\mathrm{c}, -\mathrm{c}, -\boldsymbol{i}\mathrm{c})$, 上記の素因数分解を用いると約数は次のように考えられる。

$\mathbf{1}$	$\mathbf{1+2}\boldsymbol{i}$	$\mathbf{3+2}\boldsymbol{i}$	$\mathbf{8}+\boldsymbol{i}$	実数部分、虚数部分、共に正
$\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-2}+\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-2+3}\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-1+8}\boldsymbol{i}$	実数部分は負、虚数部分は正
$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-1-2}\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-3-2}\boldsymbol{i}$	$\mathbf{-8}-\boldsymbol{i}$	実数部分、虚数部分、共に負
$-\boldsymbol{i}$	$\mathbf{2}-\boldsymbol{i}$	$\mathbf{2-3}\boldsymbol{i}$	$\mathbf{1-8}\boldsymbol{i}$	実数部分は正、虚数部分は負

上の約数すべての和は0になる。これは、整数において正と負の約数を足しているような状況と考えられる。整数においては単数として$(1, -1)$ の 2 つしかないが、複素数においては 4 つ存在するので 4 通りに分け、実、虚、共に正である 4 つのみの合計を正の約数の総和とする。

そのため、$\sigma(8+\boldsymbol{i}) = 1 + (1+2\boldsymbol{i}) + (3+2\boldsymbol{i}) + (8+\boldsymbol{i})$

$= 13 + 5\boldsymbol{i}$



＜素因数を揃える方法＞

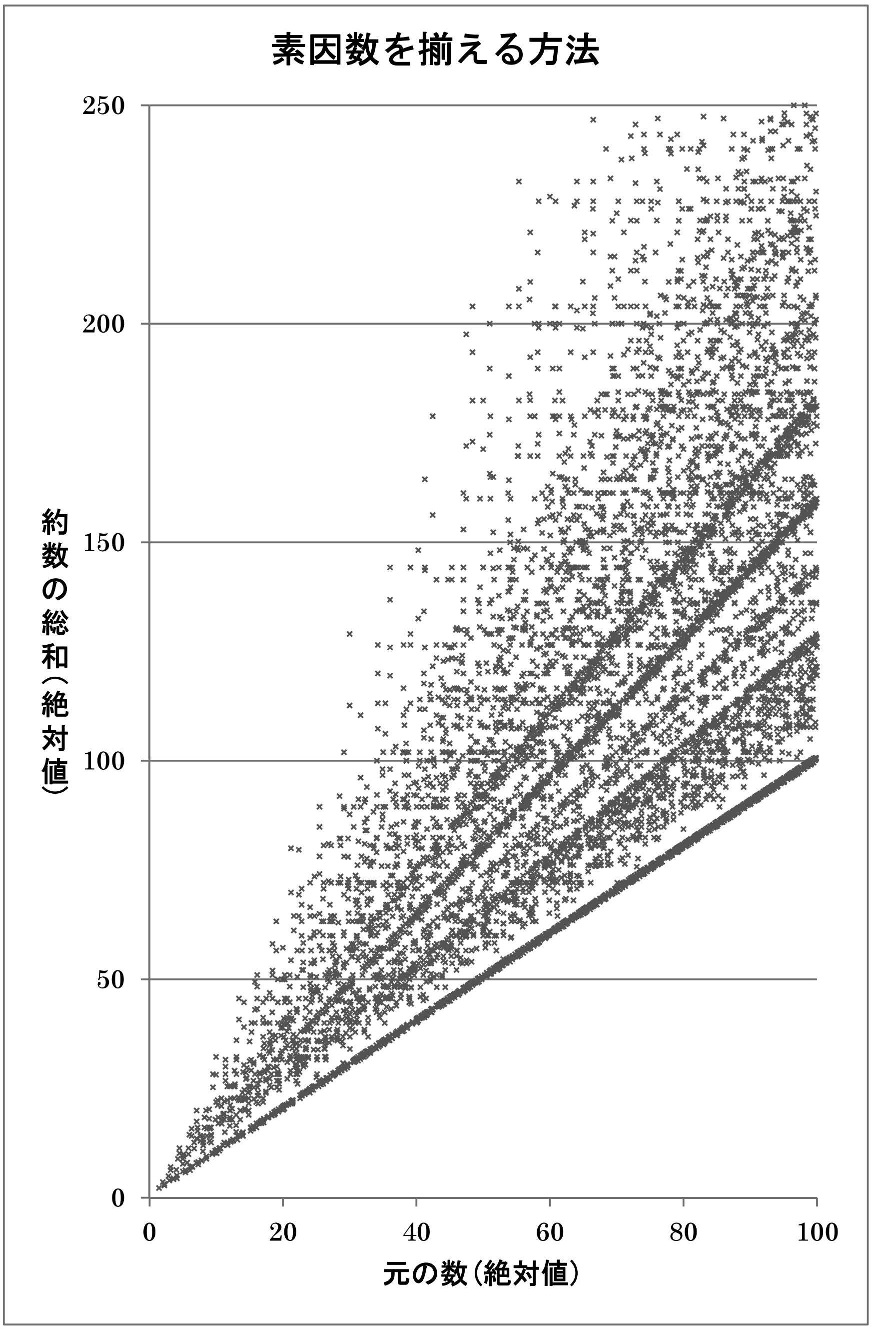
素因数分解は単数の掛け合わせを無視するため、同様に単数を用いればただ 1 通りにすることができると考えた。素因数に単数をかけると 4 通りの数字となる。そのうち整、虚、共に正の数を基準として素因数をそろえると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
8+\boldsymbol{i} &= (2-\boldsymbol{i})(3+2\boldsymbol{i}) &&= -\boldsymbol{i}(1+2\boldsymbol{i})(3+2\boldsymbol{i}) \\
&= (1+2\boldsymbol{i})(2-3\boldsymbol{i}) &&= (1+2\boldsymbol{i})(-\boldsymbol{i})(3+2\boldsymbol{i}) \\
&= (-2+\boldsymbol{i})(-3-2\boldsymbol{i}) &&= \boldsymbol{i}(1+2\boldsymbol{i})(-1)(3+2\boldsymbol{i}) \\
&= (-1-2\boldsymbol{i})(-2+3\boldsymbol{i}) &&= -(1+2\boldsymbol{i})(\boldsymbol{i})(3+2\boldsymbol{i}) \\
& &&\underline{= -\boldsymbol{i}(1+2\boldsymbol{i})(3+2\boldsymbol{i})}
\end{aligned}
$$

1 通りにととのえられたため、$8+\boldsymbol{i}$ は$1+2\boldsymbol{i}$と $3+2\boldsymbol{i}$ で構成されていると分かった。

整数の公式を用いて、 $\sigma(8+\boldsymbol{i}) = \{1+(1+2\boldsymbol{i})\}\{1+(3+2\boldsymbol{i})\}$

$$= (2+2\boldsymbol{i})(4+2\boldsymbol{i}) = 4+12\boldsymbol{i}$$



結果

＜総和と元の数との関係＞

・2 つの方法で求めた約数の総和が異なる。

・ガウス素数p の約数の総和は、$1 + \mathrm{p}$ であり、どちらの方法でも変わらない。

・素因数を揃える方法では、素因数 p^{b} が負になる可能性があるので、全体的にみると約数を揃える方法よりも小さくなる。

＜総和と整数との関係＞

$\sigma(8 + \boldsymbol{i}) = 1 + (1 + 2\boldsymbol{i}) + (3 + 2\boldsymbol{i}) + (8 + \boldsymbol{i}) = 13 + 5\boldsymbol{i}$ を絶対値の二乗で表すと、

$\sigma(\ 65\ ) = 1 + (\quad 5\quad) + (\ 13\ ) + (\ 65\ ) = 84$ ：$(\text{絶対値})^2$

$\sigma(\ 65\ ) = 1 + 5 + 13 + 65 = 84$ ：整数

上のようになり、整数65の約数と等しくなる。

$\sigma(3 + 3\boldsymbol{i}\ ) = 1 + (1 + \boldsymbol{i}) + (3) + (3 + 3\boldsymbol{i}) = 8 + 4\boldsymbol{i}$

$\sigma(\quad 18\quad) = 1 + (\ 2\ ) + (9) + (\ 18\ ) = 30$ ：$(\text{絶対値})^2$

$\sigma(\quad 18\quad) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$ ：整数

整数における素数が必ずしもガウス素数の$(\text{絶対値})^2$ と等しいとは限らない。

例えば、 $(3 + 3\boldsymbol{i})$ では、$(\text{絶対値})^2$ が 3 となる複素数が存在しないため、整数と完全には一致せず、約数3と6が抜けている。どちらの方法でも、約数の総和は整数とは異なる。

これは、複素数 A, B に対して $|\mathrm{A}|^2$ が $|\mathrm{B}|^2$ で割り切れるとき、 A は B で割り切れることに関係する。

結論

約数の総和と元の数には正の相関関係があり、約数を揃える方法の方が全体的な傾きが大きい。

約数の総和を求める方法として 2 つの方法が考えられる。

素因数の個数が増えることで約数の総和が大きくなると考えられる。

グラフに見られるデータの集まりは、比例直線であり、$\sigma(\mathrm{n})/\mathrm{n}$ が 1 となる直線が最小値であり、元の数は素数であると考えられる。

ガウス整数の約数と整数の約数は関係が深い。

展望

素因数の個数と約数の総和とが比例するか。

グラフに見られるデータの集まりがどのような値をとるか調べる。

参考文献

「数論入門」　(2008)　芹沢正三

感想

この研究では、ガウス素数を用いて約数の総和を求めることができたが、結果をうまく数式に表すことができなかったので、関係式を見つけ出せればよかった。

具体例から法則をみつけるのではなく、性質から法則をみつけようとすべきだった。

納得のいく結果が出たわけではなかったが、良い経験になった。