ルールを変えたときの三山崩しの勝敗判定法

The Method to Judge the Winner of “*Miyamakuzushi*” If We Change Its Rule

千葉県立船橋高等学校理数科 3 年
和田一樹　羽生田聖人

Abstract

We tried to judge the winner of *Miyamakuzushi* by using mathematics, and we considered this victory pattern when changing this rule. *Miyamakuzushi* is the taking stones game, but players can take stones from only one mountain. The player who takes the last stone is the winner. We are able to understand which player will win by using a binary notation. By separating the stones we could use a binary notation when we limited the number of taking stones in this game. The key of this game is a binary notation. In *Two Dimensional Nim Game*, this is a kind of *Miyamakuzushi,* if the initial placement is point symmetry, we can recognize the winner. In conclusion, we are able to understand the winning strategy of *Miyamakuzushi*'s game by using a binary notation, and we are able to judge that of *Two Dimensional Nim Game* by connecting the stones.

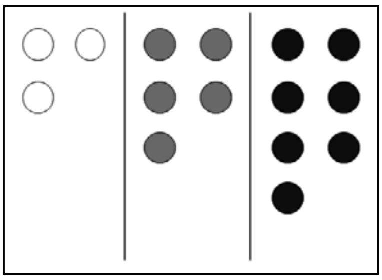
はじめに

ゲーム理論について研究をすると決めた後に三山崩しというものがあると知り、さらにその勝敗は初期配置に依存することが先行研究よりわかった。ルールを変えても勝敗は初期配置に依存するのかを明らかにしようとして本研究を始めた。

研究目的

石取りゲームの一種である三山崩しを、ルールを変化させたり、発展させたりしたときの勝敗の変化を明らかにする。

前提



最初に三山崩しのルール説明をする。これは場の 3 つのグループ（以降「山」と呼ぶ）に配置されているいくつかの石を 2 人のプレイヤーが交互に取っていき、最後に石を取りきった方が勝ちというゲームである。ただし石を取るとき、同時に 2 つ以上の山からはとることができないが、1 つの山からなら 1 個以上いくつでも取れる。これを基本ルールとする。

ここでは、3 つの山に石が a 個、b 個、c 個あるときの状態を (a, b, c) と表す。

次に、各山にある石の数をそれぞれ 2 進数表記して、各位に出てきた「1」の個数を位ごとに数える。その数が全て偶数になったときを「バランス」、1 つでも奇数があるときを「アンバランス」とよぶことにする。例えば、石の初期配置が図 1 の (3, 5, 7) の場合、

$$3 = 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

$$5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1$$

$$7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

位ごとに出てきた 1 の数を足すと、2^2 の位は 2、2^1 の位は 2、1 の位は 3 となる。

この場合奇数が入っているため「アンバランス」とよぶ。
またバランスには次のような性質がある。
第一に「山がバランスのときに石を取ると必ずアンバランスの状態になる」
第二に「山がアンバランスのときに石を取ると、取り方次第でバランスの状態にもアンバランスの状態にもできる」ということである。

これら 2 つの性質を使って基本的な三山崩しの必勝法を確立することが出来る。石の初期配置が(3,5,7)のときを例にとって考えてみる。まず、(3,5,7)はアンバランスの状態である。最初に先手はバランスの第二の性質より山をバランスさせることができる。具体的には(3,5,7)から(2,5,7)の配置にする。次に後手は山がアンバランスの状態で順番が回ってくるので第一の性質より山をアンバランスにすることしかできない。ゆえに先手には必ず山がアンバランスの状態で回ってくる。この後も同様に石を取っていくと、先手は必ず山がバランスの状態で後手に回すことができる。

ここで重要なのが(0,0,0)はバランスした状態であるということである。先手はバランスした配置を後手に与え続けるので、最終的に (0,0,0)は後手の順番に回ってくることになる。これは最後の一個を先手が取ったということを意味する。つまり先手の必勝ということになる。

例：初期配置(3,5,7)のとき（下線が引かれている配置はバランスを意味する）
(3,5,7) →先手→ (2,5,7) →後手→ (2,0,7) →先手→ (2,0,2)
→後手→ (1,0,2) →先手→ (1,0,1) →後手→ (1,0,0) →先手→ (0,0,0)

次に、石の初期配置が(2,5,7)のときについて考える。まず、(2,5,7)はバランスしている状態である。先手は山がバランスの状態で順番が回ってくるので第一の性質より山をアンバランスの状態にすることしかできない。また、後手は山がアンバランスの状態で順番が回ってくるので第二の性質より山をバランス状態にすることが出来る。これは初期配置の山がバランスしていない(3,5,7)の場合と立場が逆転した状態であるといえる。すなわち、最後の石を後手が取ることになるので後手の必勝ということになる。

以上のことより、次のことがいえる。

石の初期配置がアンバランス⇒先手必勝
石の初期配置がバランス⇒後手必勝

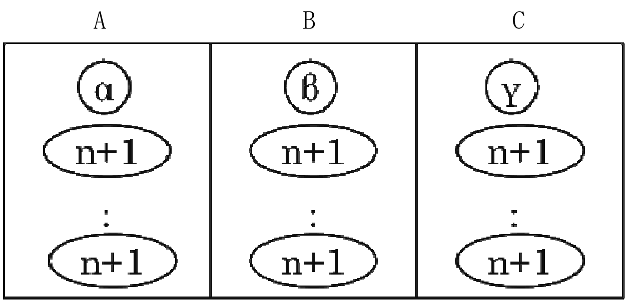
研究結果

＜一度に取れる石の個数を制限したとき＞

本来のルールでは一度に一つの山からいくつでも石を取ることができた。ここでは一度に取れる石の個数の上限を n 個までと定義したときの勝敗について考える。

最初に 3 つの山 (A,B,C) の石を次のような塊に分ける。

$A=(n+1)x+\alpha$
$B=(n+1)y+\beta$
$C=(n+1)z+\gamma$
（ただし　$\alpha \leqq n, \beta \leqq n, \gamma \leqq n$
x, y, z は非負整数）



ここでは n+1 の塊について考える。相手がこの塊から k 個（$1 \leqq k \leqq n$ …①）の石を取ったとすると、$n-k+1$ 個の石が残る。

ここで、　①より　$1 \leqq k \leqq n$
両辺に－1 を掛けて　$-n \leqq -k \leqq -1$
さらに両辺に n+1 を加えて　$1 \leqq n-k+1 \leqq n$

このことより、残った n－k＋1 個の石は次の人、すなわち自分の番で全て取ることができる。したがって、先手と後手の番が一巡したらちょうど n+1 の塊が消えるので、場にある全ての n+1 の塊は考慮する必要がなくなる。すなわち（α，β，γ）のバランスを考えればどちらが必勝か判断できる。
初期配置の石を先述の通り分割したとき、

（α，β，γ）がアンバランス⇒先手必勝
（α，β，γ）がバランス⇒後手必勝

＜二次元石取りゲームへの拡張＞

二次元石取りゲームは三山崩しを発展させたゲームである。右下の図のように、格子状のマス目の中に石が配置されていると考えてよく（石が配置されていないマスがあってもよい）、また、多くのルールは同じだが、二次元石取りゲームのみに適用されるものが二つある。

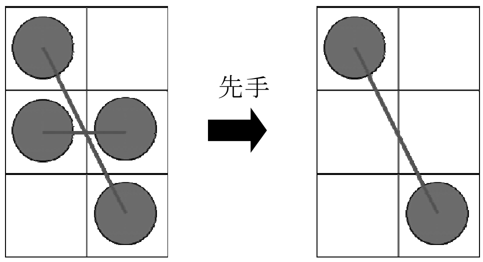
・自分の番で、縦あるいは横の一列からいくつでも石をとることができる
（例えば 1 と 4 と 7 の石を取ったり、5 と 6 の石を取ったりできる）
・スペースを挟んで 2 つ以上の石を同時に取ることはできない
（スペースとは、石が置かれていない場所を指す。例えば 4 にスペースがある場合、1 と 7 の石は同時に取れない）

1	2	3
4	5	6
7	8	9

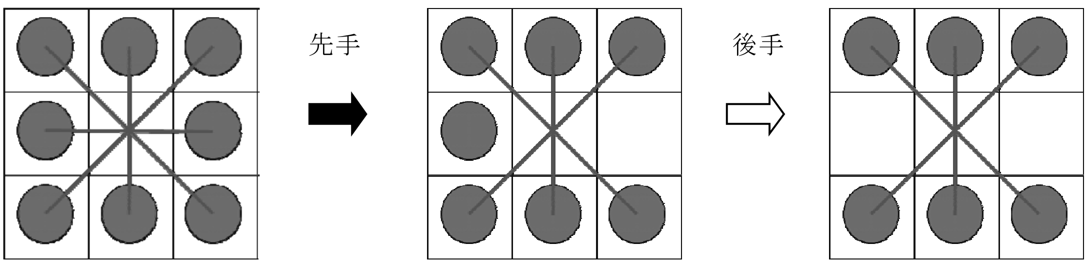
先行研究では 2 進数表記を用いた解析を行っているものもあるが、それはどの石を取れば勝ちにもっていけるかが判別しづらい。それをわかりやすくするために、この研究では初期配置が点対称である二次元石取りゲームの必勝パターンを調べた。

最初に、対応する石どうしを線で結ぶ。

右図の左が初期配置だったとき、先手は中央の線で結ばれている 2 つの石を同時に取ることができる。次に後手がどの石を取っても、先手は対応する石を取ればよいので先手必勝である。



一方下図の左のように、先手が対応している石を同時に取れない初期配置のとき、先手がどのように取っても後手がそれに対応する石を取ることができる。したがって、最終的に最後の石を後手が取れるので後手必勝である。



これらのことより、勝敗は最初に先手が対応する石を同時に取れるかどうかで左右される。

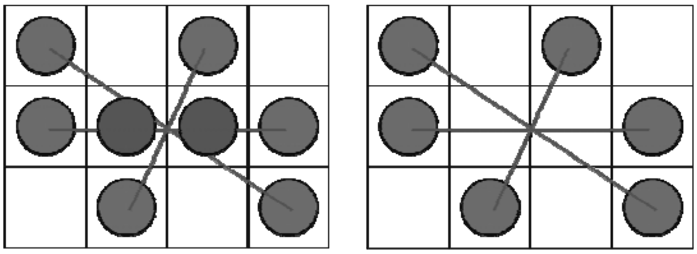
点対称の初期配置で、全ての石をマスに入れられる最小の長方形の格子には次の 3 パターンがある。

縦、横のマス目の数が　（ｉ）一方は偶数でもう一方は奇数
（ii）どちらも奇数
（iii）どちらも偶数

（ｉ)のとき

右図の左のように奇数マスの中心の列の中央 2 マスに石がある場合、先手がこの 2 つの石を取ることで先手必勝になる。

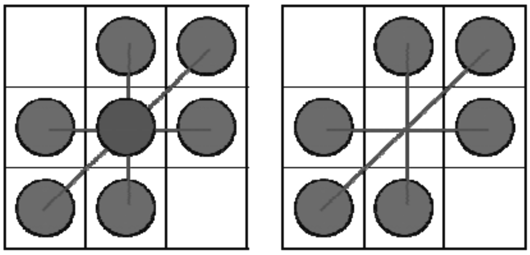
一方この 2 つの石がなければ先手の取った石に対応する石を後手が取れるので後手必勝である。



（ii)のとき

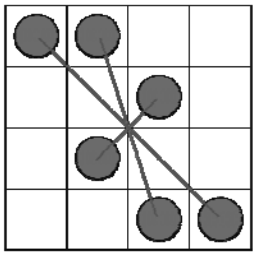
右図の左のように対称の中心に石がある場合、先手がこの石を取ることで先手必勝になる。

一方この石がなければ先手の取った石に対応する石を後手が取れるので後手必勝である。



（iii)のとき

どのような初期配置でも後手は先手の取った石に対応する石を取れるので後手必勝である。



結論

三山崩しでは、ルールを変化させても 2 進数表記を用いたバランスの考え方を応用できるため勝敗が判定できる。二次元石取りゲームに発展させたときには、初期配置が点対称ならば石どうしの対応を考慮すればどちらが勝つか判断できる。

謝辞

千葉大学理学部数学科教授　渚勝先生から研究に対する意見をいただいた。お礼申し上げる。

参考文献

内藤久資（1999）「ゲームの戦略 –Nim って知ってますか？-」
https://www.math.nagoya-u.ac.jp /~naito/lecture/high_school_1999/note.pdf

反省・感想

今回の研究ではかなり多くの部分を先行研究に頼ってしまった。また、ある程度の結果は得られたが二次元石取りゲームでは初期配置が点対称であるという条件付きでしか勝敗を判別できなかった。しかし、取る石の個数を制限した三山崩しに関しては既存の考え方から応用してオリジナルの必勝法を見出すことができたので良かった。